Vermuten, Prüfen, Herleiten

Vor der Herleitung einer Gleichung zur Berechnung irgendeiner physikalischen Größe, sollte ein Lehrer seine Schüler ermuntern, Vermutung über die Beschaffenheit einer solchen Gleichung anzustellen. Damit wird der Unterricht spannender und kann zu einem Entdeckungserlebnis werden. Ist eine solche Vermutung formuliert, dann muss sie auf ihre Gültigkeit geprüft werden. Es stellt sich die Frage: „Wie soll dies geschehen?“ Die Suche nach einem passenden Experiment zur Prüfung und dessen Ausführung kann ebenfalls spannend sein. Eine solche Vorbereitung fördert das Interesse an einer Herleitung der in Frage stehenden Gleichung.

Hierzu nun ein Beispiel. Es geht dabei um eine Gleichung zur Berechnung der Zentripetalkraft.

1. Vermutung

Die 1. Frage hierzu heißt: Welche Größen sind bestimmend für diese Zentripetalkraft F ? In Frage kommt die Masse des rotierenden Gegenstands, seine Geschwindigkeit und der Bahnradius. Wenn ein Schüler mit seiner Hand einen Gegenstand an einem Faden kreisen lässt, merkt er: Die Kraft nimmt zu mit größerer Masse, größerer Geschwindigkeit und kleinerem Radius . Diese Erfahrung gibt Anlass zu der Vermutung: $F = m \cdot v/r$.
Zur Prüfung auf seine Gültigkeit muss danach die Kraft nach unter bestimmten Bedingungen berechnet werden. Hierbei stellt sich heraus, dass die so berechnete Kraft die Einheit kg/s hat.
$F = m \cdot v/r$ kann deshalb nicht stimmen. Was muss geändert werden, damit der für F stehende Term die Einheit einer Kraft hat ? Nur v muss durch v^2 ersetzt werden.

$F = m \cdot v^2/r$ erscheint plausibel.

2. Prüfung der Vermutung

An einem schwingenden Pendel kann die Vermutung auf ihre Gültigkeit geprüft werden. Wenn der an einem Faden pendelnde Gegenstand seinen tiefsten Punkt erreicht, dann wirkt er nicht nur mit seiner Gewichtskraft auf seinen Aufhängung, sondern auch noch mit der Gegenkraft zur Zentripetalkraft.

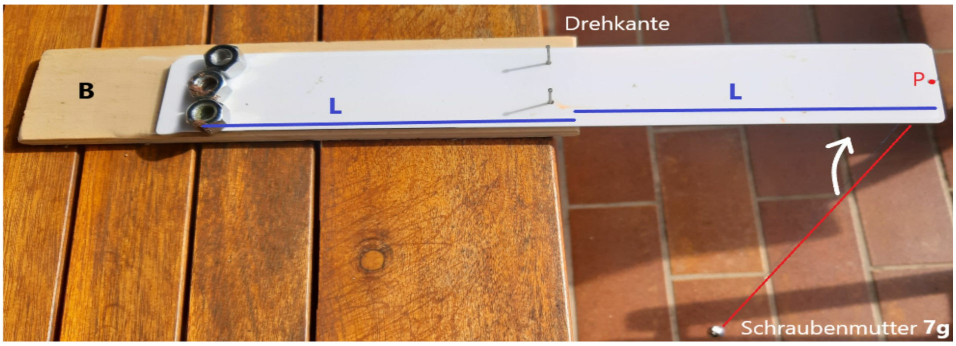

Abb.1

In der Abb. 1 ist eine Pendel mit einer 7 g schweren Schraubenmutter als Pendelkörper zu sehen. Es ist an einem Punkt P am Ende eines Plastiklineals aufgehängt. Das Lineal kann sich um eine Kante eines Bretts B drehen, auf dem es zur Hälfte aufliegt. In der Nähe der Drehkante hat es zwei Löcher, durch die zwei im Brett steckende Nägel hindurch greifen. Diese verhindern, dass das Lineal während der Pendelbewegung seitwärts verrutscht. Wird das Pendel bei straffer Führung des Fadens in eine waagrechte Lage gedreht und dann freigegeben, dann ist mindestens ein Gewicht von 21 g (drei 7g-Schrauben) auf dem linken Ende des Lineals notwendig, wenn sich dieses Ende nicht vom Brett B abheben soll. Daraus folgt: Wenn die 7g-Schraube unter dem Lineal hindurch schwingt, dann übt sie auf das Lineal eine Kraft aus, die dreimal größer ist als ihre Gewichtskraft. Die Zentripetalkraft ist demnach doppelt so groß wie die Gewichtskraft der pendelnden Schraube. Bei der Gültigkeit der Vermutung $F = m \cdot v^2/r$ folgt daraus:

$$2 \cdot m \cdot g = m \cdot v^2/r \rightarrow 2 \cdot g = v^2/r \rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot r$$

Nach dem Energieerhaltungssatz ist diese Folgerung richtig, weshalb sie als Bestätigung der Vermutung angesehen werden kann. Die Schraubenmutter hat bei waagrechter Lage des Pendels die potentielle Energie $m \cdot g \cdot r$ in Bezug auf ihren Ort unter P. Dort hat sie die kinetische Energie $m \cdot v^2/2$.

$$m \cdot v^2/2 = m \cdot g \cdot r \rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot r$$

Auch dann, wenn Schüler den Energieerhaltungssatz noch nicht kennen, aber sich schon mit der gleichförmig-beschleunigter Bewegung beschäftigt haben, kann man sie von der Richtigkeit der Gleichung $v^2 = 2 \cdot g \cdot r$ überzeugen. Sie können die Geschwindigkeit berechnen, die eine Schraube bei freiem Fall entlang einer Strecke der Länge r erreicht.

$$r = (g/2) \cdot t^2, v = g \cdot t \rightarrow r = (g/2) \cdot (v^2 / g^2) \rightarrow 2 \cdot g \cdot r = v^2$$

Diese Gleichung können sie für das Pendel aber nur dann akzeptieren, wenn ihnen vorgeführt wird, dass für die Geschwindigkeit, die ein anfangs ruhender Gegenstand bei reibungsloser Bewegung erreicht, nur die Höhenabnahme maßgebend ist und nicht der Verlauf seiner Bahn. Dies kann an einem Beispiel wie folgt geschehen:
Man lässt eine Kugel aus einer bestimmten Höhe über zwei verschieden lange schiefe Ebenen hinabrollen und misst die Zeit des Abrollens (siehe Abb.2).
Hierbei stellt sich heraus, dass die mittleren Geschwindigkeiten s / t während des Abrollens übereinstimmen (s: Weglänge auf der schiefen Ebene) . Dies gilt dann auch für die doppelt so großen Endgeschwindigkeiten.

Anmerkung: Zur Messung der Zeit ist das Programm https://g-hoehne.de/Zeit.php zu empfehlen.

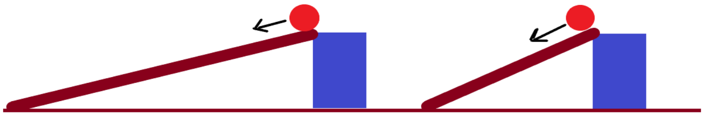

Abb.2

Nach den hier beschriebenen Messungen kann die Gleichung für die Zentripetalkraft $F = m\cdot v^2/r$ als gültig angesehen werden.

Zu einer Kraft gehört nach $F = m \cdot a$ eine Beschleunigung a. Für einen kleinen kreisenden Gegenstand auf einer Kreisbahn mit dem Radius r gilt vermutlich: $F = m\cdot v^2/r$. Daraus folgt: $a = v^2/r$.

Damit stellt sich die Frage: Woran ist dies Beschleunigung a erkennbar und wie kann sie gemessen werden?

In einem Gedankenexperiment (siehe Abb.3) wird in einer runden Schale eine Kugel K an einem Punkt A so angestoßen, dass sie nach einer 270° - Drehung (Bogenmaß: $1{,}5\cdot \pi$) zu einem Zeitpunkt t = 0 am Punkt P mit der Geschwindigkeit v vorbeirollt. Bei P wird sie von Schalenrand in Richtung der y-Achse beschleunigt, was an ihrer senkrechten Projektion K' auf die y-Achse erkennbar ist. Zur Ermittlung dieser Beschleunigung wird ihr Abstand w von P in Abhängigkeit von der Laufzeit t dargestellt.

$$w = r + r\cdot\sin((2\cdot\pi/T) \cdot t + (3/2) \cdot\pi)$$

Während der Zeit T umrundet die Kugel einmal die Schale. Hierbei dreht sie sich um den Winkel $2\cdot\pi$ (Bogenmaß).

$2\cdot\pi/T$ heißt Winkelgeschwindigkeit ω. Diese steht für den Winkel im Bogenmaß, um den sich die Kugel in einer Zeiteinheit dreht.

Beachte: Unterhalb der x-Achse ist $\sin(\alpha) < 0$.

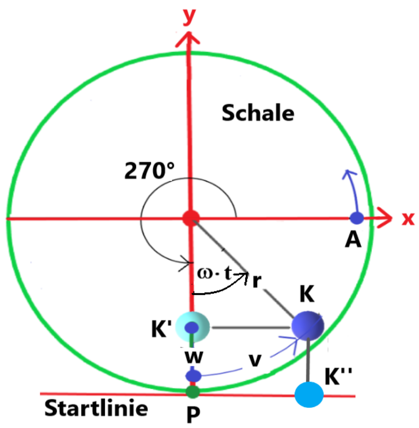

Abb. 3

Zur Darstellung der angegeben Funktion w(t) wird das folgende Programm mit r = 4 m und T = 2s in das Programmfenster der Internetseite https://g-hoehne.de/Sim.html eingetragen:

n= 2,8;t=t+0,01; x=t; w= 4+4*sin(2*pi/2*t +1,5*pi) ; z=(w-b)/0,01; b=w;L=t

Das Programm wird beendet, Wenn L = n ist.

Neben w(t) (blau)wird nach diesem Programm auch noch eine Funktion z(t) (grün) dargestellt (siehe Abb. 4). z(t) ist die Geschwindigkeit v' von K' .

Anmerkung: b und w sind die Wege zu den Zeitpunkten t und t+0,01s .

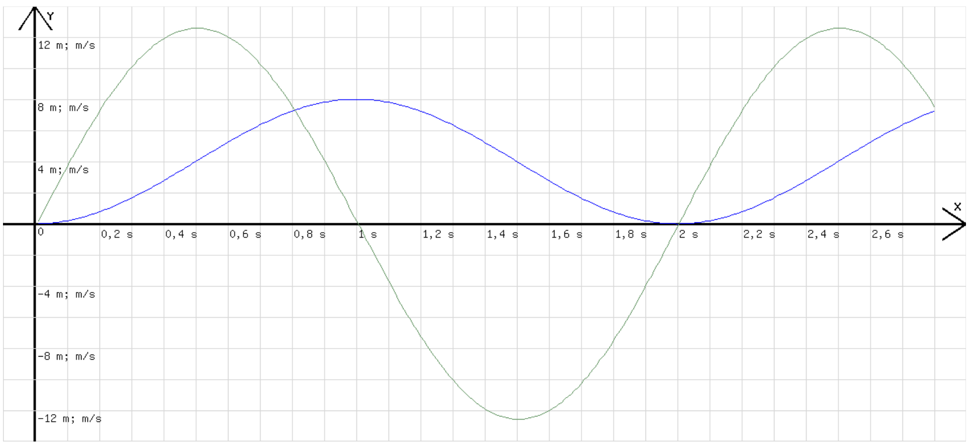

Abb.4

Die Geschwindigkeit v' der Projektion K' kann als Funktion von t ohne Schwierigkeiten hergeleitet werden (siehe Abb. 5). Zu diesem Zweck wird die Bewegung von K durch einen in die Bewegungsrichtung weisenden Pfeil, der mit seiner Länge L die Geschwindigkeit v anzeigt, dargestellt.

L kann z.B. gleich dem Weg sein, den ein Körper in 1 s, in 0,1 s oder in 0,01 s bei konstant bleibender Geschwindigkeit zurücklegt. Je nach gewählter Zeit repräsentiert ein solcher Pfeil die Geschwindigkeiten v = L/1 s bzw. v= L/0,1 s bzw. v=L/0,01 s.

Die Projektion des v darstellenden Pfeils auf eine zur y-Achse parallele Gerade beschreibt die Geschwindigkeit v' von K'.

$$v'/v = \sin(\alpha) \rightarrow v' = v \cdot \sin(\alpha),\ \alpha = \omega \cdot t$$
$$\downarrow$$
$$v' = v \cdot \sin(\omega \cdot t),\ v = 2 \cdot \pi \cdot r/T$$
$$\downarrow$$
$$v' = (2 \cdot \pi \cdot r/T) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

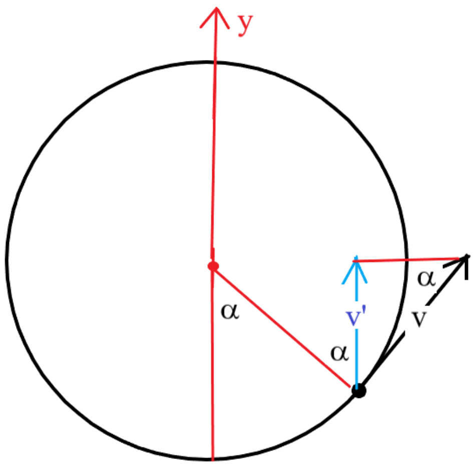

Abb.5

In der Abb. 6 ist zur Bewegung von K' neben einem v-t-Diagramm (blau) auch noch eine a-t-Diagramm der Beschleunigung (grün) zu sehen. Die Diagramme wurden mit dem folgenden Programm erstellt:

n= 2,8;t=t+0,01; x=t; w= (pi*4)*sin(2*pi/2*t) ; z=(w-b)/0,01; b=w;L=t

w= Geschwindigkeit, z = Beschleunigung

Anmerkung: b und w sind die Geschwindigkeiten zu den Zeitpunkten t und t + 0,01s .

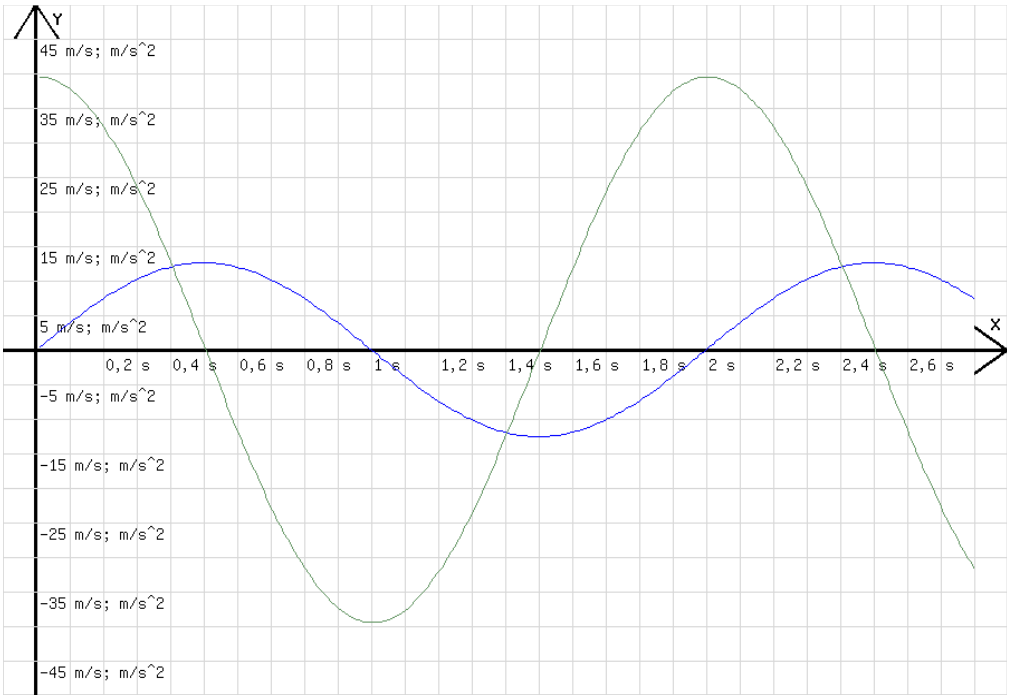

Abb.6

Als Beschleunigung bei P kann 39,5 m/s^2 abgelesen werden. K' hat die Beschleunigung 0 beim Überqueren der x-Achse zum Zeitpunkt 0,5 s.

K' bewegt sich so über die x-Achse, wie K" bei P über die y-Achse. K" ist die Projektion von K auf die zur x-Achse parallele Strecke durch den Punkt P. K" erfährt demnach am Punkt P keine Beschleunigung. Dies bedeutet, K wird bei P genau zum Mittelpunkt seiner Kreisbahn beschleunigt.

3. Herleitung von $F = m \cdot v^2/r$

Wenn die Kugel K am Punkt P vorbeirollt, dann wird K' von 0 auf die Geschwindigkeit $v' = v \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschleunigt. Zur Berechnung ihrer Beschleunigung bei P muss t sehr klein gehalten werden.

$$a = v \cdot \sin(\omega \cdot t) / t$$

Anhand der nächsten Skizze (siehe Abb.7) wird bewiesen, dass $\sin(\alpha) / \alpha$ (α im Bogenmaß) mit kleiner werdendem α gegen 1 strebt.

Dementsprechend strebt $\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)/(\omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t)/t$ mit kleiner werdendem t gegen ω.

$$\downarrow$$

Für die Beschleunigung von K zum Mittelpunkt der Kreisbahn gilt demnach: $a = v \cdot \omega$.

$$\omega = 2 \cdot \pi / T = (2 \cdot \pi \cdot r / T) / r = v/r$$

$$\downarrow$$

$$a = v \cdot \omega = v \cdot (v/r) = v^2 / r$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{F = m \cdot v^2/r}$$

Beweis:

In der Abb.7 ist ein Viertelkreis mit dem Radius r zu sehen.

$$s/r = \sin(\alpha), \quad b / r = \alpha \text{ (Winkel im Bogenmaß)}$$

Mit keiner werdendem α passt sich s immer besser dem Bogen b an.

$s/b = (s/r) / (b/r) = \sin(\alpha) / \alpha$ strebt mit kleiner werdendem α gegen 1.

Anmerkung: In diesem Artikel wurde die Differentialrechnung nicht genutzt, damit er auch ohne Kenntnis der Differentialrechnung verstanden werden kann.

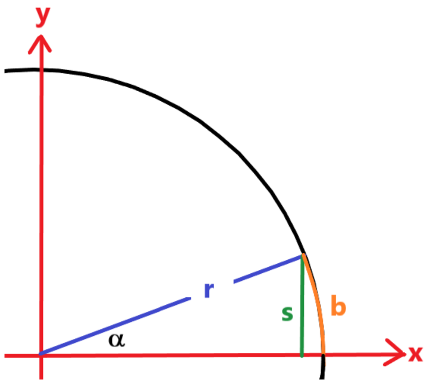

Abb.7