

Gerhard Hühne

Relativitätstheorie mit Aha-Erlebnissen

Eine anschauliche
Einführung
mit Gedankenexperimenten
für Oberschüler, Studenten,
Lehrer und...

Kein Teil dieser Broschüre kann ohne schriftliche Einwilligung des Herausgebers in irgendeiner Form vervielfältigt und verbreitet werden.

Gerhard Höhne, Im Hagen 5, 63768 Hösbach-Winzenhohl
Die Broschüre kann über b-g.hoehne@arcor.de
zum Preis 2€ + 1€ Versandkosten bestellt werden.
Bei Bestellung von mehr als 3 Exemplaren werden keine
Versandkosten berechnet.

Vorwort

Als Student der Physik fiel es mir schwer, die Relativitätstheorie anzunehmen, weil ich sie nur in sehr abstrakter Form kennen lernte. Als ich sie dann selbst unterrichten musste, war es eines meiner Hauptanliegen, diese Theorie so zu vermitteln, dass sie von Anfang an überzeugt. Inwieweit mir dieses Anliegen geglückt ist, kann der Leser anhand dieser Broschüre beurteilen.

Zu Anfang wird mit der sogenannten Experimentierwippe ein Gedankenexperiment durchgeführt, anhand dessen die Beziehungen $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ und $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ auf leicht verständliche Weise hergeleitet werden. Einer solchen Einführung bringen die Schüler viel Interesse entgegen, weil ihnen die genannten Gesetze als bedeutend bekannt sind.

Die erwähnte Experimentierwippe ist ein Gerät, welches Schüler zu Versuchen anregt, die sehr schnell zum Schwerpunkt- und Impulssatz führen. Ich habe dieses Gerät entwickelt, weil ich es als Physiklehrer in der Oberstufe eines Gymnasiums für sinnvoll hielt, die Mechanik mit dem Impulssatz zu beginnen, denn die Behandlung dieses Satzes sollte entgegen den in der Schulliteratur üblichen Gepflogenheiten der Einführung des Kraftmaßes vorangehen, da die Definition dieser Größe nach $F = d(m \cdot v) / dt$ erst mit Bezug auf dieses Gesetz sinnvoll erscheint. Nur mit dem Impulssatz kann überzeugend dargelegt werden, dass $\Delta(m \cdot v)$ ein passendes Maß für eine äußere Einwirkung ist. Über den Einsatz der Experimentierwippe im Unterricht habe ich von 1987 bis zum Jahr 2000 immer wieder in der „Praxis der Physik“ der „Physik in der Schule“ und im „MNU-Journal“ geschrieben. Ausführliche Berichte über den Einsatz der Experimentierwippe im Unterricht sind auf der Internetseite www.g-hoehne.de zu finden.

Es ging mir im Unterricht auch darum, die Relativitätstheorie mit Dingen in Verbindung zu bringen, die Schülern gut bekannt sind. Aus diesem Grund habe ich die Gesetze zur Brechung des Lichtes an Grenzflächen und zur Interferenz des Lichtes hinter einem Doppelspalt mit Hilfe der Relativitätstheorie so hergeleitet, wie dies in den Kapiteln 12 und 13 zu lesen ist. 1982 hatte ich diese Herleitungen in einer etwas komplexeren Form in der „Praxis der Physik“ veröffentlicht (PdN-Ph. 10/82).

Veröffentlicht wurden von mir auch die Inhalte der Kapitel 11 und 14. Sie erschienen 1992 in der Zeitschrift „Physik in der Schule“.

In schulüblichen Darstellungen der Relativitätstheorie vermisste ich immer wieder eine Klärung des Zwillingsparadoxons.

Deshalb widme ich diesem Paradoxon in dieser Broschüre ein eigenes Kapitel, in dem über dieses Paradoxon nicht nur aufgeklärt wird, sondern darüber hinaus Argumente für den folgenden Satz geliefert werden: **In einem abgeschlossenen Raum kann man Gravitations- und Trägheitskräfte ohne Kenntnis ihrer Ursachen nicht unterscheiden.** Dieser Satz ist die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Zu danken habe ich Herrn Dr. habil. Roger Wolf für eine sorgfältige Prüfung des Textes und konstruktive Verbesserungsvorschläge.

Gerhard Höhne

Inhaltsverzeichnis

1. Das Relativitätsprinzip.....	1
2. Die Änderung der Masse infolge Bewegung.....	1
3. Masse und Energie.....	4
4. Die Zeitdilatation.....	5
5. Die Längenkontraktion.....	6
6. Über die Synchronisation von Uhren.....	6
7. Die Lorentztransformationen.....	7
8. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten.....	10
9. Transformation der Masse und des Impulses	11
10. Transformation der Kraft.....	11
11. Satz von der Erhaltung der Masse.....	12
12. Das Brechungsgesetz der Optik.....	13
13. Die Lichtinterferenz hinter einem Doppelspalt.....	14
14. $E = h \cdot f$, Herleitung der Planckschen Beziehung anhand eines Gedankenexperiments.....	15
15. Das Zwillingsparadoxon.....	16
16. Historisches zur Entwicklung der Relativitätstheorie.....	18

1. Das Relativitätsprinzip

In einem gleichförmig fahrenden Eisenbahnwagen fällt ein Körper so wie in einem ruhenden Raum nach Galileis Fallgesetz. Es sieht danach aus, dass eine solche Gleichartigkeit für jedes Experiment gilt und deshalb mit keinem Experiment in einem geschlossenen, vermeintlich ruhenden Raum entschieden werden kann, ob dieser Raum sich wirklich in Ruhe befindet oder ob er sich stattdessen gleichförmig bewegt. Diese Wahrnehmungen sprechen für das schon von Galilei im Hinblick auf Bewegungsvorgänge formuliert Relativitätsprinzip:

In gleichförmig zueinander bewegten Räumen gelten gleiche Naturgesetze.

Bei Gedankenexperimenten mit Lichtsignalen hat man den Eindruck, dass dieses Relativitätsprinzip zu Widersprüchen führt. Man denke sich ein mit $v = 100000 \text{ km/s}$ fliegendes Raumschiff, von dem aus ein Lichtsignal in Flugrichtung ausgesandt wird. Dieses Signal hat aus der Sicht eines ruhenden Beobachters A auf der Erde die Geschwindigkeit $c = 300000 \text{ km/s}$, denn die Lichtgeschwindigkeit wird nicht von der Geschwindigkeit der Lichtquelle beeinflusst. Nach dem Relativitätsprinzip sollte das Signal aus der Sicht eines Passagiers A' im Raumschiff ebenfalls die Geschwindigkeit $c' = 300000 \text{ km/s}$ haben. A erscheint dies unpassend, da aus seiner Sicht das Raumschiff dem Lichtsignal mit 100000 km/s folgt. A' sollte seiner Meinung nach 200000 km/s als Geschwindigkeit des Lichtsignals erkennen. Die Behauptung $c' = 200000 \text{ km/s}$ ist jedoch mit dem Relativitätsprinzip unvereinbar. $c' = 300000 \text{ km/s}$ kann nur dann stimmen, wenn sich die Messinstrumente im Raumschiff infolge schneller Bewegung anders verhalten als A es sich vorstellt. **In solchen Angelegenheiten sind Experimente zur Klärung erwünscht. Im vorliegenden Fall müssen wir uns zunächst mit Gedankenexperimenten begnügen.**

Im nächsten Kapitel wird ein Gedankenexperiment beschrieben, an dem unter Berücksichtigung des Relativitätsprinzips hergeleitet wird: Die Masse m als Maß für die Trägheit eines Gegenstandes ist nicht konstant, sondern nimmt nach $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ mit wachsender Geschwindigkeit v zu. m_0 steht für die Ruhemasse des Gegenstandes und c für die Lichtgeschwindigkeit. Die angegebene Gleichung hat sich bei der Berechnung der Bahnen schneller Elektronen im Magnetfeld als richtig erwiesen und steht somit für die Gültigkeit des Relativitätsprinzips.

2. Die Änderung der Masse infolge Bewegung

In einem Raumschiff, welches sich mit der Geschwindigkeit $v = 100000 \text{ km/s}$ von seiner irdischen Startrampe entfernt, wird eine Waage aufgebaut (siehe Abb. 2.1), mit der man die Massen zweier verschiedenen schneller aber sonst gleicher Experimentierwagen W_a und W_{a^*} miteinander vergleichen kann.

Das Kernstück dieser Waage ist eine sich sehr weit nach links und rechts erstreckende Wippe, die in ihrer Mitte M mit zwei dünnen Eisenbändern an einem Metallrahmen befestigt ist. Die Bänder lassen eine Drehung der Wippe um deren Mitte M gegen den Widerstand einer Blattfeder F (Rückstellfeder) an ihrem linken Rand zu.

F: Rückstellfeder

S: Sensor zur
elektrischen
Messung
kleiner Drehungen

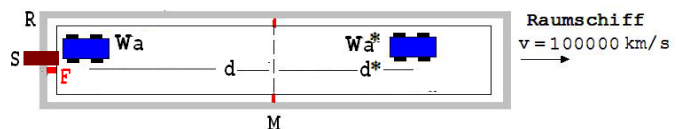


Abb. 2.1

Ein Passagier A' des Raumschiffs beschleunigt auf der Wippe zwei gleiche, anfangs im Raumschiff ruhende Experimentierwagen Wa und Wa* völlig gleichartig nach links und rechts (in und entgegen der Flugrichtung) so, dass sie gleichzeitig die Mitte M der Wippe kreuzen und von da an aus seiner Sicht reibungsfrei gleichförmig über die Wippe dahingleiten. Wa und Wa* sind deshalb aus der Sicht von A' zu jeder Zeit von M gleich weit entfernt. Es wird vorausgesetzt, dass das Raumschiff schon so weit von der Erde entfernt ist, dass die Erdanziehungskraft keine nennenswerte Bedeutung für die Vorgänge im Raumschiff hat und dass sich der Wagen Wa aus der Sicht von A' genauso schnell von M entfernt wie die entschwindende Startrampe. Wa ist dementsprechend für einen auf der Erde stehenden Beobachter A in Ruhe. A kann einen ruhenden Wagen Wa mit einem Wagen Wa* vergleichen, der aus seiner Sicht die Geschwindigkeit u hat.

Zum Vergleich der Massen von Wa und Wa* veranlasst A', dass der Rahmen der Wippe im Raumschiff kurzzeitig in seiner ganzen Länge gleichmäßig angehoben wird. Da sich Wa und Wa* aus seiner Sicht nicht unterscheiden und infolge gleicher Geschwindigkeiten von M gleich weit entfernt sind, erfährt die Wippe in ihrem Rahmen keine Drehung.

Auch der ruhende Beobachter A kann keine Drehung im Rahmen erkennen. Das bedeutet für ihn: Die von den Wagen Wa und Wa* auf die Wippe ausgeübten Trägheitskräfte F und F* genügen dem Hebelgesetz.

$$F \cdot d = F^* \cdot d^* \rightarrow a \cdot m \cdot d = a \cdot m^* \cdot d^* \rightarrow m \cdot d = m^* \cdot d^*$$

$F = a \cdot m$ und $F^* = a \cdot m^*$ sind die Trägheitskräfte, welche Wa und Wa* beim Anheben auf die Wippe ausüben.

d und d*: Abstände der Wagen Wa und Wa* von M aus der Sicht von A

m und m*: Massen der Wagen Wa und Wa* nach der Wahrnehmung von A

a: Beschleunigung während des kurzzeitigen Anhebens

$m \cdot d = m^* \cdot d^*$ kann auch als eine Folgerung aus dem Schwerpunktsatz gesehen werden. Der Schwerpunkt der beiden Wagen bleibt nach diesem Satz aus der Sicht beider Beobachter während des hier geschilderten Experiments auf der Mitte M der Wippe. $m \cdot d = m^* \cdot d^*$ ist eine notwendige Bedingung hierfür.

Wenn der Experimentator A' im Raumschiff den Wagen Wa und Wa* von M aus gleichzeitig Lichtsignale nachschickt, dann müssen diese bei Gültigkeit des Relativitätsprinzips nach Reflexion an den Wagen wieder gleichzeitig bei ihm ankommen. Es wird nun gezeigt, dass unter dieser Bedingung aus der Sicht des Beobachters A die Ungleichung $d^* < d$ zutrifft und dass sich daraus die experimentell nachprüfbare Schlussfolgerung $m^* > m$ ergibt.

Der Ausgangspunkt für die Untersuchung mit dem Ergebnis $d^* < d$ ist folgende Überlegung:

Wenn die Laufzeiten der nach rechts und links ausgesandten Lichtsignale für A' übereinstimmen, dann muss dies auch für A gelten. Es ist denkbar, dass die für A geltenden Laufzeiten t_{rechts} und t_{links} der beiden Signale mit Hilfe von d und d* bestimmbar sind. In diesem Fall könnte man die für Zeiten gültigen Terme $t_{\text{rechts}}(d, d^*)$ und $t_{\text{links}}(d, d^*)$ einander gleichsetzen und hätte somit eine Gleichung, die den Vergleich von d und d* ermöglicht.

Für das auf Wa* gerichtete Lichtsignal gilt:

Hinweg: $c \cdot t_1 = d^* + u \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{d^*}{c - u}$

d*: Abstand des Wagens Wa* von M beim Start des Lichtsignals

u: Geschwindigkeit von Wa* aus der Sicht von A

t₁: Zeit für den Hinweg

c: Lichtgeschwindigkeit

Während der Zeit t_1 wird der Weg des Lichtes zu Wa^* um $u \cdot t_1$ verlängert. Somit ist der Hinweg des Lichtsignals nicht gleich d^* , sondern gleich $d^* + u \cdot t_1$.

Rückweg: $c \cdot t_2 = d^* + u \cdot t_1 - v \cdot (t_1 + t_2)$

t_2 : Rücklaufzeit des Lichtsignals, v : Geschwindigkeit des Raumschiffs

Während des Hin- und Rücklaufs kommt M dem Lichtsignal um $v \cdot (t_1 + t_2)$ nach. Deshalb erhält man den Rückweg, indem man den Hinweg mit der Länge $d^* + u \cdot t_1$ um $v \cdot (t_1 + t_2)$ verkürzt. Aus den Gleichungen für den Hin- und den Rückweg folgt:

$$c \cdot t_1 + c \cdot t_2 = 2 \cdot (d^* + u \cdot t_1) - v \cdot (t_1 + t_2) \rightarrow c \cdot (t_1 + t_2) + v \cdot (t_1 + t_2) = 2 \cdot (d^* + u \cdot t_1)$$

$$(t_1 + t_2) \cdot (c + v) = 2 \cdot (d^* + u \cdot t_1) \rightarrow t_1 + t_2 = 2 \cdot \frac{d^* + u \cdot t_1}{c + v}$$

Im rechten Teil der Gleichung wird für t_1 der Term $\frac{d^*}{(c-u)}$ eingesetzt.

$$\text{Laufzeit } t_{\text{rechts}} = t_1 + t_2 = 2 \cdot \frac{d^* + \frac{u \cdot d^*}{c-u}}{c + v} = 2 \cdot \frac{d^* \cdot (c-u) + u \cdot d^*}{(c-u) \cdot (c + v)} = \frac{2 \cdot d^* \cdot c}{(c-u) \cdot (c + v)}$$

Für das nach links auf Wa gerichtete Signal gilt:

Hinweg: $c \cdot T_1 = d$, Rückweg: $c \cdot T_2 = d + v \cdot (T_1 + T_2)$

T_1 : Hinlaufzeit, T_2 : Rücklaufzeit, d : Abstand des Wagens Wa von M beim Start des Signals

Während des Hin- und Rücklaufs entfernt sich M von Wa zusätzlich um $v \cdot (T_1 + T_2)$. Aus den beiden Gleichungen für den Hin- und Rückweg folgt:

$$c \cdot (T_1 + T_2) = 2 \cdot d + v \cdot (T_1 + T_2) \rightarrow c \cdot (T_1 + T_2) - v \cdot (T_1 + T_2) = 2 \cdot d \rightarrow (T_1 + T_2) \cdot (c - v) = 2 \cdot d$$

$$\text{Laufzeit } T_{\text{links}} = T_1 + T_2 = \frac{2 \cdot d}{c - v}$$

$$\text{Wegen } T_{\text{links}} = t_{\text{rechts}} \text{ gilt: } \frac{2 \cdot d}{c - v} = \frac{2 \cdot d^* \cdot c}{(c - u) \cdot (c + v)} \rightarrow \frac{d^*}{d} = k = \frac{(c - u) \cdot (c + v)}{c \cdot (c - v)}$$

Es wird eine Gleichung gewünscht, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses $d^*/d = k$ von der Geschwindigkeit u des Wagens Wa^* zeigt. Deshalb muss die Geschwindigkeit v des Raumschiffs durch einen von u abhängigen Term ersetzt werden.

$$\text{Es gilt: } \frac{d + d^*}{d} = \frac{u}{v} \rightarrow 1 + \frac{d^*}{d} = \frac{u}{v} \rightarrow 1 + k = \frac{u}{v} \rightarrow v = \frac{u}{1 + k}$$

Anmerkung: Während sich Wa^* um d^* von der Mitte der Wippe M entfernte, legten Wa^* und M aus der Sicht des Beobachters A die Wege $d + d^*$ (Abstand zwischen Wa und Wa^*) und d zurück. Die Wege verhalten sich wie die Geschwindigkeiten u und v zueinander.

$$\frac{u}{1+k} \text{ wird in } k = \frac{(c-u) \cdot (c+v)}{c \cdot (c-v)} \text{ für } v \text{ eingesetzt: } k = \frac{(c-u) \cdot (c + \frac{u}{1+k})}{c \cdot (c - \frac{u}{1+k})}$$

Es wird mit $1+k$ erweitert und dann beiderseits mit $[c \cdot (c + c \cdot k - u)]$ multipliziert:

$$k = \frac{(c-u) \cdot (c + c \cdot k + u)}{c \cdot (c + c \cdot k - u)} \rightarrow \underline{k \cdot c^2} + k^2 \cdot c^2 - \underline{k \cdot c \cdot u} = c^2 + \underline{c^2 \cdot k} + \underline{c \cdot u} - \underline{u \cdot c} - \underline{u \cdot c \cdot k} - u^2$$

$$\rightarrow k^2 \cdot c^2 = c^2 - u^2 \rightarrow k^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2} \rightarrow k = \frac{d^*}{d} = \sqrt{1 - u^2 / c^2} \text{ . Unter Berücksichtigung von}$$

$$d^* \cdot m^* = d \cdot m \leftrightarrow \frac{d^*}{d} = \frac{m}{m^*} \text{ folgt daraus: } \frac{m}{m^*} = \sqrt{1 - u^2 / c^2} \rightarrow m^* = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

m ist die Masse des aus der Sicht von A ruhenden Wagens W_a , die auch dem Wagen W_a^* in Ruhe zugeordnet wird, denn die beiden Wagen sind einander gleich.

$m = \text{Ruhemasse} / \sqrt{1 - u^2 / c^2}$ ist somit das richtige Maß für die Trägheit eines Körpers.

Für die Ruhemasse ($u = 0$) schreiben wir von nun an m_0 .

Das Diagramm (Abb. 2.2) zeigt an, wie sich die Masse eines Körpers ($m_0 = 1\text{ kg}$) mit zunehmender Geschwindigkeit ändert. Erst bei Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit sind deutliche Abweichungen von der Ruhemasse zu erkennen.

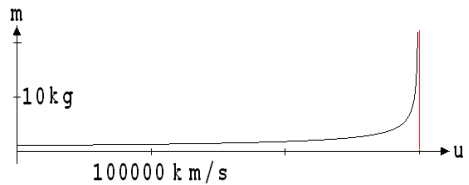


Abb. 2.2

3. Masse und Energie

Die Masse eines Körpers nimmt mit seiner kinetischen Energie zu. Anhand des im 2. Kapitel beschriebenen Gedankenexperiments (Abb. 2.1) kann leicht eine Beziehung zwischen dem Massenzuwachs und der kinetischen Energie hergeleitet werden.

Wenn der hintere Rand der Wippe auf den ruhenden Wagen W_a der Masse m stößt, dann wird W_a aus der Sicht von A' elastisch reflektiert. A dagegen sieht diesen Vorgang als eine Beschleunigung aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit u . W_a wird etwas gestaucht und haftet infolgedessen eine Zeit Δt am linken Rand der Wippe, wobei er von diesem Rand mit einer Kraft F entlang einer Strecke der Länge $v \cdot \Delta t$ angeschoben wird. Die Wippe verrichtet demnach die Arbeit $W = F \cdot v \cdot \Delta t$ gegen W_a . Da der Impuls von W_a vor dem Stoß gleich 0 und danach gleich $(m_0/k) \cdot u$ ist, steht $(m_0/k) \cdot u$ für die Impulsänderung des Wagens während der Zeit Δt .

$$F = \text{Impulsänderung} / \text{Zeit der Änderung} = \frac{m \cdot u}{\Delta t} = \frac{m_0 \cdot u}{k \cdot \Delta t}, \quad m = \frac{m_0}{k}, \quad k = \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

F steht für den zeitlichen Mittelwert der Kraft während Δt !

Für die gegen W_a verrichtete Arbeit W gilt demnach: $W = F \cdot v \cdot \Delta t = \frac{m_0 \cdot u \cdot v}{k}$. Unter Berücksichtigung der im 2. Kapitel hergeleiteten Gleichung $v = \frac{u}{1 + k}$ erhält man

$W = \frac{m_0 \cdot u^2}{k \cdot (1+k)}$. Die Erweiterung des letzten Bruchterms mit $(1 - k)$ führt zu:

$$W = \frac{m_0 \cdot u^2 \cdot (1 - k)}{k \cdot (1 - k^2)}, \quad k^2 = 1 - u^2 / c^2 \rightarrow W = \frac{m_0 \cdot u^2 \cdot (1 - k)}{k \cdot u^2 / c^2} = \left(\frac{m_0}{k} - m_0 \right) \cdot c^2$$

$$\frac{m_0}{k} - m_0 = m - m_0 = \text{Massenzuwachs } \Delta m \rightarrow W = \Delta m \cdot c^2$$

Mit der Geschwindigkeit u hat der Wagen W_a demnach die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \Delta m \cdot c^2$. Es stellt sich nun die Frage, ob ein Gegenstand auch dann seine Masse um Δm gemäß $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ ändert, wenn seine Energieabnahme bzw. Zunahme um ΔE nicht für eine kinetische Energie steht. Im 11. Kapitel wird bewiesen, dass diese Frage bejaht werden muss. So kann man z.B. die Energie berechnen, die bei der Spaltung oder der Verschmelzung von Atomkernen frei wird. Voraussetzung für eine solche Rechnung ist die Kenntnis der Gesamtmassen von Ausgangs- und Endprodukten.

Da die Masse eines Körpers unendlich groß wird, wenn seine Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit zustrebt, kann er niemals auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt

werden, da hierzu eine unendlich hohe Energie erforderlich wäre.

Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Grenzggeschwindigkeit.

Mit $E_{\text{kin}} = m_0 \cdot u^2 / 2$ wurde im Rahmen der Mechanik die kinetische Energie eines Körpers der Masse m_0 mit der Geschwindigkeit u berechnet.

Nach der Rechnung auf der letzten Seite gilt: $E_{\text{kin}} = \Delta m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot u^2}{k \cdot (1+k)}$. Wenn u erheblich

kleiner als c ist, dann kann mit $k \approx 1$ geschrieben werden: $E_{\text{kin}} = \Delta m \cdot c^2 \approx m_0 \cdot u^2 / 2$.

4. Die Zeitdilatation (Zeitdehnung)

Die Gleichungen über die Massenänderung sind experimentell bestätigt worden. Das Relativitätsprinzip kann somit als richtig gelten.

Es wurde darauf hingewiesen, dass nach diesem Prinzip Längenmaße und Uhren sich bei Bewegung anders verhalten müssen als in Ruhe.

In diesem Zusammenhang muss deutlich gemacht werden, dass die Feststellung, ein Raum sei in Ruhe, willkürlicher Natur ist. Wird ein Raum S als ruhend definiert, dann nennen wir einen Raum S' bewegt, wenn er seinen Standort in Bezug auf S ändert.

Es soll nun der Frage nachgegangen werden:

Wie ändern sich Längenmaße und Uhren, wenn sie von einem ruhenden in einen dazu gleichförmig bewegten Raum gebracht werden?

Wir stellen uns während des in der Abb. 2.1 angedeuteten Experiments zwei Uhren U und U' auf den Wagen Wa und Wa* vor. Diese Uhren seien zu Beginn des Experiments über der Mitte M auf die Zeit 0 eingestellt worden. Beide Uhren zeigen nach dem Relativitätsprinzip aus der Sicht des Raumschiffpassagiers A' die gleiche Zeit an, wenn sie die Enden der Wippe erreichen, die sowohl für A wie für A' von M gleich weit entfernt sind. Wenn die ruhende Uhr U aus der Sicht von A am linken Ende den Abstand d von M hat und die Zeit t anzeigt, dann ist U' aus der Sicht von A erst $d^* = d \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} < d$ von M entfernt und zeigt deshalb eine kleinere Zeit t' an. Bewegte Uhren gehen für A demnach langsamer als ruhende Uhren.

Wie verhält sich t' zu t ?

Wenn die um d von M entfernte ruhende Uhr U die Zeit t anzeigt, dann zeigt U' im Abstand d^* von M die kleinere Zeit t' und später mit dem größeren Abstand d die Zeit t an. Die Zeiten t' und t verhalten sich dementsprechend zueinander wie die Abstände d^* und d .

$$t'/t = d^* / d, \quad d^* / d = \sqrt{1 - u^2/c^2} \rightarrow t' = t \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} \rightarrow t = t' / \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Was folgt daraus?

Nach dem Relativitätsprinzip dauert ein Ereignis mit einem naturgesetzlich zeitlich festgelegten Verlauf in einem ruhenden Laboratorium genauso lang wie in einem bewegten, wenn jeweils mit der Uhr des Laboratoriums gemessen wird. t_0 sei die Dauer eines Vorgangs in einem mit der Geschwindigkeit u fliegenden Laboratorium. Ein ruhender Beobachter ordnet mit seinen schneller tickenden Uhr diesem Vorgang die längere Zeit $t = t_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ zu. Aus seiner Sicht wird das Ereignis infolge der Bewegung zeitlich gedehnt. Diese **Zeitdilatation** ermöglicht es den in der oberen Atmosphäre entstehenden, sehr schnell fliegenden Myonen (Elementarteilchen), trotz ihrer kurzen Halbwertszeit von $1,523 \mu\text{s}$ die Erdoberfläche zu erreichen. Ohne diesen relativistischen Effekt wären selbst bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit nach rund 450 m die Hälfte aller Myonen schon wieder zerfallen.

5. Längenkontraktion

Wir stellen uns vor, die beiden Wagen W_a und W_a^* der Abb. 2.1 würden aus der Sicht des im Raumschiff arbeitenden Experimentators A' zwei gleiche Latten direkt hinter sich herziehen. Aus der Sicht eines ruhenden Beobachters A ruht die an W_a angebundene Latte mit der Länge L , während sich die an W_a^* mit der Geschwindigkeit u bewegt. Die Enden dieser Latten treffen sich während der Bewegung in der Mitte M der Wippe. Die Längen L und L^* der an W_a und W_a^* hängenden Latten sind aus der Sicht von A nicht gleich lang, sondern verhalten sich wie die Abstände d und d^* der Wagen W_a und W_a^* von M .

$$d^*/d = L^*/L = \sqrt{1 - u^2/c^2} \rightarrow L^* = L \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Wir sehen: Die Länge eines sich in Bewegungsrichtung erstreckenden Gegenstandes nimmt aus der Sicht eines ruhenden Beobachters mit zunehmender Geschwindigkeit ab (Längenkontraktion). Dies gilt nicht für einen Stab, der quer zur Bewegungsrichtung liegt. Ihm werden vom ruhenden und mitbewegten Beobachter gleiche Längen zugeordnet. Zum Beweis denken wir uns einen Stab mit der Ruhelänge L , der in dem mit der Geschwindigkeit v fliegenden Raumschiff quer zur Bewegungsrichtung liegt. Wie in Abb. 5.1 angedeutet, misst der mitbewegte Beobachter A' in diesem Fall die Ruhelänge L des Stabes [EF]

in folgender Weise: Er schickt vom einen Ende E ein Lichtsignal nach dem anderen Ende F . Bei F wird dieses Signal von einem Spiegel reflektiert und kehrt wieder zu E zurück. A' gibt als Streckenlänge L den Wert $c \cdot t'$ an. t' ist die von A' gemessene halbe Laufzeit des Lichtsignals.

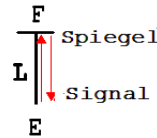


Abb. 5.1

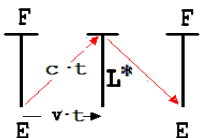


Abb. 5.2

Aus der Sicht eines ruhenden Beobachters A bewegt sich das Lichtsignal auf der in Abb. 5.2 dargestellten Bahn. Während das Lichtsignal von E nach F und wieder zurück gelangt, bewegt sich der Stab [EF] mit der Geschwindigkeit v nach rechts. A berechnet die Länge L^* von [EF] nach dem Lehrsatz des Pythagoras: $c^2 \cdot t^2 - v^2 \cdot t^2 = L^{*2} \rightarrow L^* = c \cdot t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

t ist die von A gemessene halbe Laufzeit des Lichtes.

Wegen $t = t' / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ gilt: $L^* = c \cdot t' = L$.

6. Über die Einstellung von Uhren, die an verschiedenen Orten aufgestellt sind (Synchronisation)

Mehrere an verschiedenen Orten aufgestellte Uhren sollen nach einer Uhr Q eingestellt werden. Es erscheint zunächst empfehlenswert nach folgender Anweisung vorzugehen: Man nehme die Uhr Q , fahre mit ihr zu den verschiedenen Orten und stelle jeweils die dort vorhandenen Uhren nach Q ein. Überdenkt man dieses Verfahren, dann erweist es sich als mangelhaft, da der Gang der Uhr Q von der Reisegeschwindigkeit abhängt. Besser ist folgende Methode: Zur Einstellung einer Uhr R in einem Raum S nach einer anderen Uhr Q im gleichen Raum wird ein Ort P in S bestimmt, der genau zwischen R und Q liegt. An diesem Ort werden Lichtblitze erzeugt. Hierbei wird die Uhr R so eingestellt, dass R und Q gleiche Zeiten anzeigen, wenn ein von P kommendes Lichtsignal bei ihnen eintrifft. Werden die Uhren in einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Raum S' in gleicher Weise synchronisiert, dann wird man erfahren, dass Ereignisse, die aus der Sicht eines mitbewegten Beobachters A' gleichzeitig stattfinden, für einen ruhenden Beobachter A nicht immer gleichzeitig sind. Dieser Sachverhalt soll hier eingehend anhand der Abb. 6.1 untersucht

werden. S sei ein ruhender, S' ein mit Geschwindigkeit v bewegter Raum. Diesen Räumen sind x,y-Koordinatensysteme zugeordnet (siehe Abb. 6.1). Die beiden Uhren Q und R in S' seien so eingestellt, dass ein von einem genau dazwischen liegenden Punkt P nach beiden Seiten ausgesandtes Lichtsignal Q und R zu gleicher Zeit t' (bei gleicher Anzeige) erreicht.

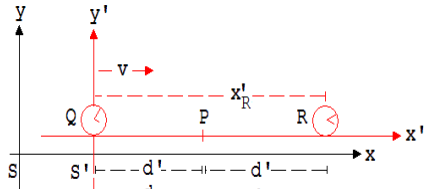


Abb. 6.1

d: Abstände P-Q und P-R in Bezug auf den ruhenden Beobachter A
 x'_R , d' : Abstände in Bezug auf einen mitbewegten Beobachter A'

Von A aus gesehen benötigt das Lichtsignal zu der Uhr Q die Zeit t_1 und zu der Uhr R die etwas längere Zeit t_2 .

$$t_1 \cdot c = d - v \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{d}{c+v}, \quad t_2 \cdot c = d + v \cdot t_2 \rightarrow t_2 = \frac{d}{c-v}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d}{c-v} - \frac{d}{c+v} = \frac{2 \cdot d \cdot v}{c^2 - v^2} = \frac{2 \cdot d \cdot v}{c^2 \cdot k^2}, \quad k^2 = 1 - v^2/c^2$$

Demzufolge erreicht es R um $\Delta t = t_2 - t_1$ später als Q. Aus der Sicht von A geht infolgedessen die Uhr Q gegenüber der Uhr R vor. Wenn das Lichtsignal die Uhr Q erreicht, dann zeigt diese die Zeit t' an. Dann vergeht nach den ruhenden Uhren noch die Zeit Δt bis das Lichtsignal zu R gelangt und R dann die Zeit t' anzeigt. Während Δt läuft Q aus der Sicht von A um $\Delta t' = \Delta t \cdot k$ weiter. Q und R zeigen deshalb danach für A zur gleichen Zeit t verschiedene Zeiten an, nämlich $t' + \Delta t'$ und t' . Aus $\Delta t = 2 \cdot d \cdot v / (c^2 \cdot k^2)$ folgt unter Berücksichtigung der Zeitdilatation $\Delta t = \Delta t' / k$ und der Längenkontraktion $x'_R \cdot k = 2 \cdot d$:

$$\frac{\Delta t'}{k} = \frac{x'_R \cdot k \cdot v}{c^2 \cdot k^2} \rightarrow \Delta t' = \frac{x'_R \cdot k^2 \cdot v}{c^2 \cdot k^2} = \frac{x'_R \cdot v}{c^2}$$

Aus der Sicht von A geht die Uhr Q in Bezug auf die Uhr R um $\Delta t' = x'_R \cdot v / c^2$ vor.

7. Die Lorentztransformationen

Ein Raum S' bewege sich mit der Geschwindigkeit v in Bezug auf einen ruhenden Raum S. S und S' seien mit Koordinatensystemen versehen, deren x-Achsen aufeinander liegen und deren y- und z-Achsen parallel zueinander verlaufen (siehe Abb. 7.1). S' sei mit Uhren und Längeneinheiten ausgerüstet, die auch in S üblich sind. Die an den verschiedenen Stellen von S und S' aufgestellten Uhren seien nach den gegebenen Vorschriften aufeinander abgestimmt (synchronisiert) und auf die Zeit 0 eingestellt worden, als die Koordinatensysteme von S und S' sich zusammen befanden.

An einem Punkt P werde von einem Beobachter A' in S' und einem ruhenden Beobachter A in S ein Ereignis wahrgenommen.

t ist die von A gemessene Zeit des Ereignisses und x die von A gemessene x-Koordinate des Punktes P. t' und x' sind die entsprechenden Werte eines Beobachters A' in S'.

Wie können die zu einem Koordinatensystem gehörenden Werte errechnet werden, wenn die Werte des anderen Systems bekannt sind ?

$x - v \cdot t$ ist der von A gemessene Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung des bewegten Koordinatensystems. Der Beobachter A' misst diesen Abstand mit verkürzten

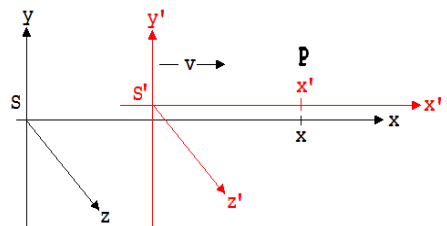


Abb. 7.1

Einheiten (Längenkontraktion!) und ordnet ihm deshalb den größeren Wert x' zu.

$$x' \cdot k = (x - v \cdot t), \quad k = \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{1.) \quad x' = (x - v \cdot t) / k,}$$

Zum Zeitpunkt t liest A auf der am Nullpunkt des x', y' -Systems stehenden Uhr die Zeit t'_0 ab. Unter Berücksichtigung der Zeitdilatation gilt: $t'_0 = t \cdot k$ (Die bewegte Uhr geht langsamer!). Die Zeit t' , die A zum gleichen Zeitpunkt t auf der in S' am Ort P befindlichen Uhr abliest, ist um $x' \cdot v/c^2$ kleiner als t'_0 .

$$t'_0 = t' + x' \cdot v/c^2, \quad t'_0 = t \cdot k \quad \rightarrow \quad t \cdot k = t' + x' \cdot v/c^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{2.) \quad t = (t' + x' \cdot v/c^2) / k}$$

Die Gleichungen 1 und 2 ermöglichen auch die Berechnung von x bei Kenntnis von x' und t' und die von t' bei Kenntnis von x und t . Im ersten Fall muss t in der 1. Gleichung durch den in der 2. Gleichung für t stehenden Term $(t' + x' \cdot v/c^2) / k$ ersetzt und die so gewonnene neue Gleichung nach x aufgelöst werden. Im zweiten Fall muss x' der 2. Gleichung durch den rechten Term $(x - v \cdot t) / k$ der 1. Gleichung ersetzt werden. Hiernach ist nach t' aufzulösen. So erhält man insgesamt 4 als Lorentztransformationen bekannte Gleichungen. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

$$\begin{array}{ll} x' = (x - v \cdot t) / k & t' = (t - x \cdot v/c^2) / k \\ x = (x' + v \cdot t') / k & t = (t' + x' \cdot v/c^2) / k \end{array}$$

Da die quer zur Bewegungsrichtung liegenden Strecken keine Längenkontraktionen erfahren gilt für die y - und z -Koordinaten eines abseits von der x -Achse liegenden Punktes: $y = y'$ und $z = z'$.

Es ist nun zu prüfen, ob die Lorentztransformationen mit dem Relativitätsprinzip im Einklang sind.

Die Lorentztransformationen sind nur dann annehmbar, wenn mit ihnen die folgenden Schlussfolgerungen aus dem Relativitätsprinzip begründet werden können:

1. Wenn ein Beobachter in S die Uhren in S' langsamer laufen sieht als eine Uhr in S , dann müssen für einen Beobachter in S' die Uhren in S langsamer gehen als die in S' .
2. Wenn der Beobachter in S einem in S' liegenden 1m-Maßstab eine Länge $< 1m$ zuordnet, dann muss ein Beobachter in S' einen in S liegenden 1m-Maßstab ebenfalls verkürzt sehen.
3. Wenn sich eine Lichtwelle in S nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, dann muss dies auch in S' gelten.

Zu 1.: In S sei eine Uhr U an einem Ort mit der Koordinate x aufgestellt (siehe Abb. 7.2). Wenn diese Uhr die Zeit t_1 anzeigt, steht der Zeiger einer ihr augenblicklich benachbarten Uhr U'_1 in S' auf t'_1 . In der Folgezeit entfernt sich U'_1 von U , andere Uhren des Flugkörpers erreichen U . Wenn U die Zeit t_2 anzeigt, dann gibt die ihr dann benachbarte Uhr U'_2 die Zeit t'_2 an. Der mit der Uhr U gemessenen Zeit $t_2 - t_1$ ordnet der Beobachter A' in S' die Zeit $t'_2 - t'_1$ zu.

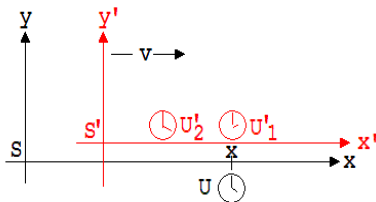


Abb. 7.2

$$\text{Es gilt: } t'_1 = (t_1 - v \cdot x / c^2) / k, \quad t'_2 = (t_2 - v \cdot x / c^2) / k$$

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) / k \quad \rightarrow \quad t'_2 - t'_1 > t_2 - t_1$$

Aus $t'_2 - t'_1 > t_2 - t_1$ folgert A' : Die Uhren in S laufen langsamer als die in S' .

Der ruhende Beobachter A hält dem entgegen, t'_2 sei zu groß, weil die Uhr U'_2 gegenüber der Uhr U'_1 vorgehe. Seiner Meinung nach ist dementsprechend $t'_2 - t'_1$ zu groß.

Wir stellen fest, dass die Beobachter A und A' beim Vergleich ihrer Uhren zu völlig widersprüchlich erscheinenden Ergebnissen kommen. Dies liegt daran, dass A so wie A' eine aus seiner Sicht bewegte Uhr mit zwei Uhren seines Raums vergleicht, die vom anderen Raum aus gesehen verschiedene Zeiten anzeigen.

Zu 2.: $[x_1 \ x_2]$ sei eine Strecke auf der x-Achse eines ruhenden Koordinatensystems. Beobachter in S' messen die zu x_1 und x_2 gehörenden x' -Werte nach ihren Uhren gleichzeitig zum Zeitpunkt t' und ordnen der Strecke $[x_1 \ x_2]$ die Länge $x'_2 - x'_1$ zu. Aus der Sicht eines ruhenden Beobachters A wird x'_2 nach x'_1 gemessen, weil aus seiner Sicht die Uhr bei x'_2 im Vergleich mit der Uhr bei x'_1 nachgeht.

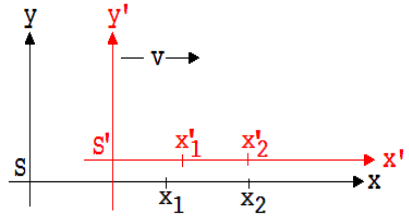


Abb. 7.3

Nach seiner Wahrnehmung rückt die bei x'_1 für den Anfang der Strecke $[x_1 \ x_2]$ angelegte Markierung vor der Bestimmung von x'_2 nach rechts, weshalb die Differenz $x'_2 - x'_1$ seiner Meinung nach zu klein ausfällt.

Nach den Lorentztransformationen gilt: $x_1 = (x'_1 + v \cdot t')/k$, $x_2 = (x'_2 + v \cdot t')/k$

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)/k \rightarrow x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \cdot k \rightarrow x'_2 - x'_1 < x_2 - x_1$$

Es wurde früher gezeigt, dass bewegte, zur Ausbreitungsrichtung parallele Strecken dem ruhenden Beobachter kleiner erscheinen als gleichartige ruhende Strecken. Da dies der gerade hergeleiteten Ungleichung zu widersprechen scheint, muss darauf hingewiesen werden, dass ruhende Beobachter die Koordinaten x_1 und x_2 von den Endpunkten einer Strecke $[x'_1 \ x'_2]$ nach ruhenden Uhren gleichzeitig messen, während bewegte Beobachter die Koordinaten x'_1 und x'_2 von den Endpunkten einer Strecke $[x_1 \ x_2]$ nach den Uhren ihres Raums gleichzeitig bestimmen.

Zu 3.: Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ werde an dem zu diesem Zeitpunkt gemeinsamen Koordinatenursprung von S und S' eine kugelförmige Lichtwelle ausgesandt. P sei ein Punkt, der zu einem Zeitpunkt (t, t') auf der Wellenfront der Kugelwelle liegt. Für seinen Abstand d vom Koordinatenursprung des Systems S gilt:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Lorentztransformationen:

$$(x' + v \cdot t')^2 / k^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot (t' + v \cdot x'/c^2)^2 / k^2$$

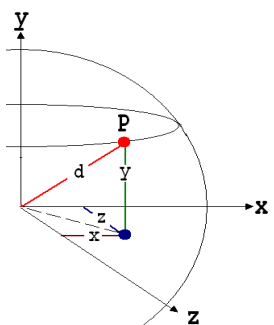


Abb. 7.4

$$x'^2 + v^2 \cdot t'^2 + \underline{2 \cdot x' \cdot v \cdot t'} + y'^2 \cdot k^2 + z'^2 \cdot k^2 = t'^2 \cdot c^2 + x'^2 \cdot v^2/c^2 + \underline{2 \cdot x' \cdot v \cdot t'}$$

$$x'^2 - x'^2 \cdot v^2/c^2 + y'^2 \cdot k^2 + z'^2 \cdot k^2 = t'^2 \cdot c^2 - v^2 \cdot t'^2$$

$$x'^2 \cdot (1 - v^2/c^2) + y'^2 \cdot k^2 + z'^2 \cdot k^2 = t'^2 \cdot c^2 \cdot (1 - v^2/c^2); \quad k^2 = (1 - v^2/c^2)!$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot t'^2$$

Hiernach entfernt sich die Welle in S' so wie in S nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit $\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)} / t' = c$ vom Koordinatenursprung. Wir sehen, dass zur Aufstellung der Lorentztransformationen sowohl S als auch S' als ruhend angesehen werden kann. In beiden Räumen sind in Bezug auf den anderen Raum gleiche Voraussetzungen gegeben.

8. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Ein Raum S' bewege sich mit der Geschwindigkeit v in Bezug auf ein als ruhend definierten Raum S . Ein Gegenstand P fliege mit der Geschwindigkeit u' in S' zum Zeitpunkt $t' = 0$ durch den Nullpunkt des zu S' gehörenden Koordinatensystems. Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ stimme das Koordinatensystem vom S' mit dem von S überein. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}$ habe im System S die Geschwindigkeitskoordinaten u_x und u_y und in S' die Koordinaten u'_x und u'_y .

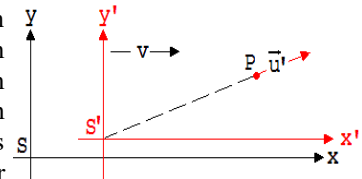


Abb. 8.1

Wie kann u_x und u_y bei Kenntnis u'_x und u'_y berechnet werden?

$$u_x = x / t, \quad x = (x' + v \cdot t') / k, \quad t = (t' + v \cdot x' / c^2) / k, \quad k = \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$u_x = \frac{x}{t} = \frac{x' + v \cdot t'}{t' + v \cdot x' / c^2} = \frac{x' / t' + v}{1 + v \cdot (x' / t') / c^2}, \quad \frac{x'}{t'} = u'_x \rightarrow u_x = \frac{u'_x + v}{1 + v \cdot u'_x / c^2}$$

$$u_y = y / t, \quad y = y', \quad y' / t' = u'_y, \quad t = (t' + v \cdot x' / c^2) / k$$

$$u_y = \frac{y' \cdot k}{t' + v \cdot x' / c^2} = \frac{(y' / t') \cdot k}{1 + v \cdot (x' / t') / c^2} = \frac{u'_y \cdot k}{1 + v \cdot u'_x / c^2}$$

In entsprechender Weise erhält man für u'_x und u'_y : $u'_x = \frac{u_x - v}{1 - v \cdot u_x / c^2}$, $u'_y = \frac{u_y \cdot k}{1 - v \cdot u_x / c^2}$.

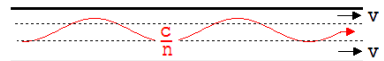
Ausbreitung von Licht in fließendem Wasser

Nach Herleitung eines Gesetzes ist ein Anwendungsbeispiel wünschenswert. Führt ein solches Beispiel zu einem nachweisbaren Ergebnis, dann hat man einen Beleg für die Richtigkeit des Gesetzes.

Mit dem hergeleiteten Additionsgesetz kann die Geschwindigkeit berechnet werden, mit der sich Licht in fließendem Wasser in Fließrichtung ausbreitet (siehe Abb. 8.2).

Die Fließgeschwindigkeit des Wassers ist v . Das Licht hat in Bezug auf einen im Wasserstrom treibenden Beobachter die Geschwindigkeit c_w .

Das Verhältnis c / c_w ($c = c_{\text{Vakuum}}$) heißt Brechungsindex n des Wassers.



$$c_w = c / n$$

Abb. 8.2

Nach dem Additionsgesetz der Geschwindigkeiten finden wir für die Lichtgeschwindigkeit c_{FW} im fließenden Wasser in Bezug auf einen ruhenden Beobachter:

$$c_{FW} = \frac{c / n + v}{1 + (v \cdot c / n) / c^2} = \frac{c / n + v}{1 + v / (c \cdot n)}$$

Für die durch die Fließgeschwindigkeit v verursachte Geschwindigkeitsänderung des Lichtes erhalten wir:

$$\Delta c = c_{FW} - c/n = \frac{c/n + v}{1 + v/(c \cdot n)} - c/n = \frac{c/n + v - c/n \cdot [1 + v/(c \cdot n)]}{1 + v/(c \cdot n)} = \frac{v - v/n^2}{1 + v/(c \cdot n)} = v \cdot \frac{1 - 1/n^2}{1 + v/(c \cdot n)}$$

Unter Berücksichtigung von $v \ll c$ (v ist gegenüber c vernachlässigbar klein) können wir auch schreiben: $\Delta c = v \cdot (1 - 1/n^2)$. Die letzte Gleichung wurde von dem französischen Physiker Fizeau im 19. Jahrhundert anhand von Messdaten aufgestellt.

9. Transformation der Masse und des Impulses

Impulse und Massen werden wie Ortskoordinaten und Zeiten transformiert.

$$\begin{aligned} p'_x &= (p_x - m \cdot v) / k & m' &= (m - p_x \cdot v / c^2) / k & p'_y &= p_y \\ p_x &= (p'_x + m' \cdot v) / k & m &= (m' + p'_x \cdot v / c^2) / k & p'_z &= p_z \end{aligned}$$

Der Beweis dieser von Max Planck hergeleiteten Gleichungen soll hier nur angedeutet werden. Es wird mit der Herleitung der Gleichungen in der 2. Spalte begonnen. Da die Ruhemassen $m_0 = m' \cdot \sqrt{1 - u'^2/c^2}$ und $m_0 = m \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$ in den Räumen S und S' gleich sind, kann sofort die folgende Gleichung mit m und m' aufgestellt werden. u und u' sind die Geschwindigkeiten in S und S'.

$$m \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} = m' \cdot \sqrt{1 - u'^2/c^2} \leftrightarrow m \cdot \sqrt{1 - (u_x^2 + u_y^2)/c^2} = m' \cdot \sqrt{1 - (u'^2_x + u'^2_y)/c^2}$$

Die y-Achse ist so gelegt, dass keine Bewegung in z-Richtung stattfindet. Die Geschwindigkeitskoordinaten u_x und u_y werden nach dem Additionstheorem durch u'_x und u'_y ersetzt. Nach einer umfangreichen algebraischen Umformung findet man:

$$\sqrt{1 - (u_x^2 + u_y^2)/c^2} = \frac{k \cdot \sqrt{1 - u'^2/c^2}}{1 + v \cdot u'_x / c^2}, \quad k = \sqrt{1 - v^2/c^2} \rightarrow m \cdot \frac{k \cdot \sqrt{1 - u'^2/c^2}}{1 + v \cdot u'_x / c^2} = m' \cdot \sqrt{1 - u'^2/c^2}$$

$$m = m' \cdot (1 + v \cdot u'_x / c^2) / k, \quad m' \cdot u'_x = p'_x \rightarrow \mathbf{1.) \quad m = (m' + p'_x \cdot v / c^2) / k}$$

Für m' erhält man in ähnlicher Weise: **2.) $m' = (m - p_x \cdot v / c^2) / k$**

Aus den Gleichungen für m und m' können leicht die Transformationsgleichungen für p_x und p'_x hergeleitet werden. $p'_x = (p_x - m \cdot v) / k$ erhält man z.B., indem in der 1. Gleichung m' durch $(m - p_x \cdot v / c^2) / k$ ersetzt und anschließend nach p'_x auflöst.

Beweis der Gleichung $p'_y = p_y \leftrightarrow m' \cdot u'_y = m \cdot u_y$

m' wird durch $(m - p_x \cdot v / c^2) / k$ und u'_y nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten durch $u_y \cdot k / (1 - v \cdot u_x / c^2)$ ersetzt.

$$m' \cdot u'_y = \frac{(m - p_x \cdot v / c^2)}{k} \cdot \frac{u_y \cdot k}{1 - v \cdot u_x / c^2}, \quad p_x = m \cdot u_x \rightarrow \mathbf{p'_y = p_y}$$

10. Transformation der Kraft

1. Transformation einer Kraft in Richtung der x'-Achse

Wir stellen uns einen Körper K vor, der von einer Kraft F'_x beschleunigt werde.

Wie groß ist F_x ?

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{(\Delta p'_x + v \cdot \Delta m') / k}{(\Delta t' + \Delta x' \cdot v / c^2) / k} = \frac{\Delta p'_x / \Delta t' + v \cdot \Delta m' / \Delta t'}{1 + (\Delta x' / \Delta t') \cdot (v / c^2)}$$

$\Delta m' \cdot c^2$ ist die in S' gegen K verrichtete Arbeit $F'_x \cdot \Delta x'$.

$$\Delta m' \cdot c^2 = F'_x \cdot \Delta x' \rightarrow \Delta m' = F'_x \cdot \Delta x' / c^2$$

$$\Delta p'_x / \Delta t' = F'_x !$$

$$F_x = \frac{F'_x + v \cdot (F'_x \cdot \Delta x' / c^2) / \Delta t'}{1 + (\Delta x' / \Delta t') \cdot v / c^2} = F'_x \cdot \frac{1 + (\Delta x' / \Delta t') \cdot (v / c^2)}{1 + (\Delta x' / \Delta t') \cdot (v / c^2)} \rightarrow \mathbf{F_x = F'_x}$$

$\Delta m' \cdot c^2 = F'_x \cdot \Delta x'$ und somit auch $F_x = F'_x$ gilt nur dann, wenn F'_y und F'_z gleich 0 sind.

2. Transformation einer Kraft in Richtung der y-Achsen

$F_y = \Delta p_y / \Delta t$ und $F'_y = \Delta p'_y / \Delta t'$ sind die Kräfte parallel zu den y-Achsen in S und S'.

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t}, \Delta p_y = \Delta p'_y, \Delta t = \frac{\Delta t' + \Delta x' \cdot v / c^2}{k} \rightarrow F_y = \frac{\Delta p'_y \cdot k}{\Delta t' + \Delta x' \cdot v / c^2} = \frac{(\Delta p'_y / \Delta t') \cdot k}{1 + (\Delta x' / \Delta t') \cdot v / c^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta t'} = F'_y, \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u'_x, F_y = \frac{F'_y \cdot k}{1 + u'_x \cdot v / c^2}$$

Im Fall $u'_x = 0$ gilt: $F_y = F'_y \cdot k$

11. Satz von der Erhaltung der Masse

Wir denken uns ein mit v fliegendes abgeschossenes System aus mehreren Teilchen 1, 2, ... Die x-Koordinate des i. Teilchenimpulses nennen wir p_i . Für die Summe Σp_i aus den Impulskoordinaten p_i aller Teilchen gilt:

$$\Sigma p_i = (\Sigma p'_i + v \cdot \Sigma m'_i) / k \rightarrow \Sigma m'_i = (k \cdot \Sigma p_i - \Sigma p'_i) / v.$$

Aus der letzten Gleichung können wir unter Berücksichtigung des Impulssatzes (Σp_i ist in einem abgeschlossenen System konstant) folgenden Schluss ziehen:

Die Gesamtmasse eines abgeschlossenen Systems ist konstant.

Die Gleichung $E = \Delta m \cdot c^2$ ist demnach nicht nur für die kinetische Energie, sondern für jede Energieart gültig. Der Massenerhaltungssatz entspricht dem Energieerhaltungssatz.

Wird z.B. ein fliegender Körper von einer Feder abgebremst, dann bleibt die Gesamtmasse vom fliegenden Objekt und der Feder konstant. Während die Masse des einen Gegenstandes zunimmt, nimmt die des anderen ab. Der Massenzuwachs einer Spiralfeder während einer Stauchung kann auch anhand des in der Abb. 10.1 dargestellten Gedankenexperiments berechnet werden. In einem mit der Geschwindigkeit v gleichförmig bewegten Raum S' wird eine Spiralfeder der Masse m um d' gestaucht, wobei das linke Ende der Feder an einem Ort mit der x' -Koordinate 0 festgehalten wird (siehe Abb. 10.1). Die dabei verrichtete Arbeit errechnet der Beobachter A' in S' nach $F' \cdot d'$ unter der Annahme, dass d' sehr klein ist und somit die Kraft F' während der

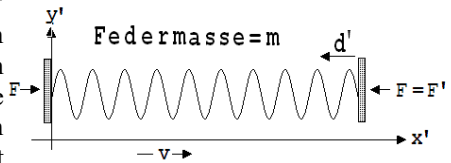


Abb. 10.1

Verformung als konstant angesehen werden kann. $F' \cdot d'$ ist für A' die Energiezunahme $\Delta E'$ der Feder während der Stauchung. Die Feder erhält aus seiner Sicht keinen Impuls, da die von rechts wirkende Kraft F eine gleich große Gegenkraft gegen das linke Ende der Feder verursacht (das rechte Ende der Feder wird gleichförmig verschoben). Anders sieht dies ein ruhender Beobachter A. Für ihn sind auch die von links und rechts wirkenden Kräfte gleich groß, aber nicht deren Wirkungszeiten Δt_L und Δt_R . Die stauchenden Kräfte der Größe F wirken aus der Sicht von A am linken Federende vom Zeitpunkt t_{1L} bis zum Zeitpunkt t_{2L} und am rechten Ende von t_{1R} bis t_{2R} . Für A' wirken die stauchenden Kräfte links wie rechts zwischen den Zeitpunkten t'_1 und t'_2 .

$$t_{1L} = t'_1 / k, \quad t_{2L} = t'_2 / k, \quad t_{1R} = [t'_1 + (v/c^2) \cdot x'_1] / k, \quad t_{2R} = [t'_2 + (v/c^2) \cdot x'_2] / k$$

x'_1 und x'_2 : x' -Werte vom rechten Ende der Feder vor und nach der Stauchung

$d' = x'_1 - x'_2$ ist somit die Stauchung der Feder aus der Sicht von A'.

$\Delta t_L = t_{2L} - t_{1L}$, $\Delta t_R = t_{2R} - t_{1R}$ sind für A die Wirkungszeiten der beiden Kräfte.

$$\Delta t_L = (t'_2 - t'_1) / k, \quad \Delta t_R = t_{2R} - t_{1R} = [(t'_2 - t'_1) + (v/c^2) \cdot (x'_2 - x'_1)] / k$$

$$\Delta t_R = t_{2R} - t_{1R} = [(t'_2 - t'_1) - (v/c^2) \cdot d'] / k$$

Für den Beobachter A wirkt demnach die Kraft auf das in S' ruhende linke Ende der Feder während eines Zeitabschnitts $\Delta t = \Delta t_L - \Delta t_R$ ohne Gegenkraft und bewirkt dementsprechend eine Impulsänderung der Feder nach $\Delta(m \cdot v) / \Delta t = F \rightarrow \Delta(m \cdot v) = F \cdot \Delta t$.

Da sich die Geschwindigkeit v der Feder nicht ändert gilt: $\Delta(m \cdot v) = v \cdot \Delta m$.

$$v \cdot \Delta m = F \cdot \Delta t = F \cdot (\Delta t_L - \Delta t_R) = F \cdot (v/c^2) \cdot d' / k, \quad F = F' \rightarrow \Delta m \cdot k = (1/c^2) \cdot d' \cdot F'$$

$\Delta m \cdot k$ ist die Änderung der Ruhemasse $\Delta m'$ in S' .

$$\text{Somit gilt: } \Delta m' = (1/c^2) \cdot d' \cdot F' \rightarrow \Delta m' \cdot c^2 = d' \cdot F' = \Delta E'.$$

12. Das Brechungsgesetz der Optik

Fällt ein Lichtstrahl auf eine ebene Grenzfläche zwischen durchsichtigen Materialien, dann wird er fast immer gebrochen. Das Verhältnis aus dem Sinus des Einfallswinkels α und dem Sinus des Brechungswinkels β ist konstant. $\sin \alpha / \sin \beta$ heißt Brechungsindex n . n ist von den Materialien abhängig, welche die Grenzfläche bilden. Das Brechungsgesetz kann mit Hilfe der Relativitätstheorie hergeleitet werden. In einem ruhenden Raum S stellen wir uns zu diesem Zweck einen Quader aus Glas vor, auf den ein Lichtstrahl gerichtet ist (siehe Abb. 12.1). Die durch die rote Strecke dargestellte ebene Wellenfront des Lichtes sei zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit c_L (Lichtgeschwindigkeit in Luft) durch den Koordinatenursprung K_0 des zu S gehörenden x, y -Koordinatensystems gegangen. P sei ein Punkt auf dieser Wellenfront. Für seinen y -Wert gilt: $y = c_L \cdot t / \cos \alpha - x \cdot \tan \alpha$.

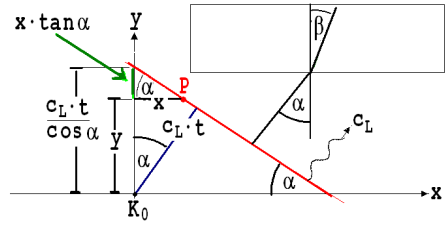


Abb. 12.1

Wir denken uns nun noch einen in Richtung der x -Achse mit der Geschwindigkeit v bewegten Raum S' mit einem x', y' -Koordinatensystem, dessen Achsen zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ mit denen des x, y -Systems übereinstimmen.

v kann so gewählt werden, dass die Wellenfront aus der Sicht eines Beobachters A' in S' parallel zur x' -Achse verläuft. Dies ist dann der Fall, wenn das zu einem Punkt P der Wellenfront gehörende y' von x' unabhängig ist.

$$y = c_L \cdot t / \cos \alpha - x \cdot \tan \alpha, \quad t = (t' + x' \cdot v / c^2) / k, \quad x = (x' + v \cdot t') / k$$

$$y = y' = (c_L / \cos \alpha) \cdot (t' + x' \cdot v / c^2) / k - [(x' + v \cdot t') / k] \cdot \tan \alpha$$

$$y' = (c_L / \cos \alpha - v \cdot \tan \alpha) \cdot t' / k + [(c_L / \cos \alpha) \cdot v / c^2 - \tan \alpha] \cdot x' / k$$

Im Fall $(c_L / \cos \alpha) \cdot v / c^2 - \tan \alpha = 0$ verläuft die Wellenfront in S' parallel zur x' -Achse.

$$(c_L / \cos \alpha) \cdot v / c^2 - \tan \alpha = 0 \rightarrow (c_L / \cos \alpha) \cdot v / c^2 - \sin \alpha / \cos \alpha = 0 \rightarrow \sin \alpha = v \cdot c_L / c^2$$

Da in S' die Wellenfront auch nach dem Eintritt in das Glas parallel zur x' -Achse bleibt, gilt eine entsprechende Gleichung auch für die gebrochene Welle im Glas.

$$\sin \beta = v \cdot c_G / c^2, \quad c_G = \text{Lichtgeschwindigkeit im Glas}$$

$$\sin \alpha = v \cdot c_L / c^2, \quad \sin \beta = v \cdot c_G / c^2 \rightarrow \sin \alpha / \sin \beta = c_L / c_G = n$$

13. Die Lichtinterferenz hinter einem Doppelspalt

In einem ruhenden Raum S ist ein Lichtstrahl auf einen Doppelspalt mit der Gitterkonstanten g gerichtet (siehe Abb. 13.1). Der Strahl verläuft parallel zur y -Achse des zu S gehörenden Koordinatensystems. g steht für den Abstand der beiden Spalte, denen auf der x -Achse die Werte $-g/2$ und $+g/2$ zugeordnet sind. Auf einem Bildschirm über den Spalten sind Lichtmaxima und Lichtminima.

Zum Verständnis dieser Erscheinung stellen wir uns ein mit der Geschwindigkeit $v > 0$ in x -Richtung fliegenden Raum mit einem x', y' -Koordinatensystem vor, dessen x' -Achse direkt über dem Bildschirm verläuft und dessen y' -Achse zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ die y -Achse des anderen Systems überstreicht. v ist so gewählt, dass die Lichtschwingungen (Schwingungszeit $= T$) in den beiden Spalten aus der Sicht eines Beobachters A' in S' gleiche Phasen haben. Wellenberge, die aus der Sicht von A' gleichzeitig zu einem Zeitpunkt t' im linken und rechten Spalt erscheinen, werden aus der Sicht eines Beobachters A in S als Wellenberge gesehen, die zu verschiedenen Zeitpunkten t_1 und t_2 mit dem zeitlichen Abstand $n \cdot T$ ($n = 1; 2; 3, \dots$) auf den Doppelspalt treffen. $n = 0$ ist auszuschließen, weil die Wellenberge im Fall $v > 0$ von A und A' nicht gleichzeitig in den beiden Spalten gesehen werden können.

$$\begin{aligned} t' &= [t_1 - (v/c^2) \cdot (-g/2)] / k \\ t' &= [t_2 - (v/c^2) \cdot (g/2)] / k \\ t_1 - (v/c^2) \cdot (-g/2) &= t_2 - (v/c^2) \cdot (g/2) \\ t_2 - t_1 &= (v/c^2) \cdot g = n \cdot T \\ c &= \lambda / T \rightarrow T = \lambda / c, \lambda = \text{Wellenlänge} \\ n \cdot T &= n \cdot (\lambda / c) = (v/c^2) \cdot g \\ &\downarrow \\ n \cdot \lambda &= g \cdot v/c \end{aligned}$$

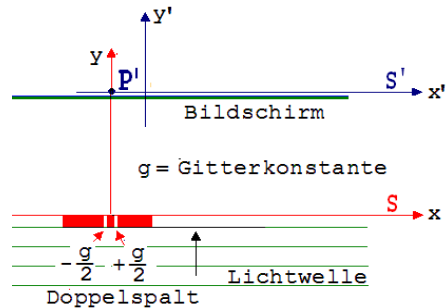


Abb. 13.1

Aus der Sicht eines Beobachters A' in S' laufen zwei Wellenberge, die zum Zeitpunkt t' die Spalten verlassen auf einen genau über dem Doppelspalt liegenden Punkt P' in S' zu. Wenn die Wellenberge bei P' eintreffen, dann hat sich P' aus der Sicht von A innerhalb einer Zeit Δt nach rechts zu einem Ort auf dem Bildschirm bewegt, der $x = v \cdot \Delta t$ von der y -Achse entfernt ist. Auch die den genannten Wellenbergen nachfolgenden Wellentäler und Wellenberge, die aus der Sicht von A' gleichzeitig die Spalten verlassen und parallel zur y' -Achse auf die x' -Achse zulaufen, gelangen dorthin. Deshalb sieht A an diesem Ort ein Intensitätsmaximum.

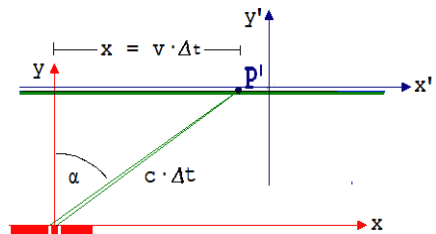


Abb. 13.2

$$n \cdot \lambda = g \cdot v/c, \quad v/c = v \cdot \Delta t / (c \cdot \Delta t) = \sin \alpha \quad \rightarrow \quad n \cdot \lambda = g \cdot \sin \alpha$$

Für das Maximum 1. Ordnung ($n = 1$!) gilt: $\lambda = g \cdot \sin \alpha$

Wenn S' in S ruht ($v = 0$), dann wird in beiden Systemen auf der y -Achse ($\sin \alpha = 0$) das Maximum 0. Ordnung wahrgenommen ($n = 0$).

Nicht nur rechts von der y-Achse, sondern auch links von ihr entstehen Intensitätsmaxima. Zur Begründung dieser Behauptung muss das hier erläuterte Gedankenexperiment geändert werden. Man lässt S' nicht nach rechts sondern stattdessen nach links fliegen.

Ein Lichtminimum ist bei P' dann, wenn von A' aus gesehen ein Wellenberg in einem Spalt gleichzeitig mit einem Wellental im anderen Spalt erscheint. Aus der Sicht von A unterscheiden sich die Zeiten dieser beiden Ereignisse um $\Delta t = (2 \cdot n - 1) \cdot T/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Δt kann $T/2$ oder $3 \cdot T/2$ oder $5 \cdot T/2$ sein.

Für ein Lichtminimum gilt demnach:

$$(2 \cdot n - 1) \cdot T/2 = (v/c^2) \cdot g \rightarrow [(2 \cdot n - 1) / 2] \cdot \lambda = g \cdot \sin \alpha$$

Mit der Abb. 13.3 ist dargestellt, wie sich zwei von den weiß markierten Spalten ausgehende Kreiswellen überlagern und dabei Intensitätsmaxima und Minima (dunkle Streifen) auf dem Schirm ausbilden. Die Wellenberge sind hier rot und die Wellentäler grün dargestellt. a ist der Abstand zwischen den Maxima 1. Ordnung und 0. Ordnung.

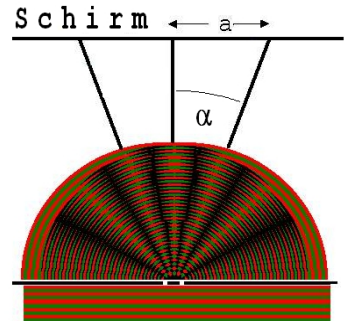


Abb. 13.3

14. $E = h \cdot f$

Herleitung der Planckschen Beziehung anhand eines Gedanken-experiments

Wir denken uns, wie in der nebenstehenden Skizze angedeutet, einen gleichförmig nach links mit der Geschwindigkeit v bewegten Spiegel, auf den Licht der Frequenz f fällt. Das Licht hat bekanntlich Energie und somit auch eine Masse, übt dementsprechend eine Kraft auf den bewegten Spiegel aus und verrichtet hierbei

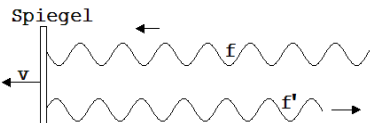


Abb. 14.1

eine Arbeit, die zu einem Energieverlust des Lichtes führt. Neben der Energie nimmt auch die Frequenz ab. Dies ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass durch die Bewegung des Spiegels das reflektierte Signal und somit auch die Wellenlänge gestreckt wird. Mit der größeren Wellenlänge stellt sich nach $\lambda \cdot f = c$ eine kleinere Frequenz f' ein.

Meistens sind Energieverluste des Lichts nicht mit einer Frequenzänderung verbunden. Man denke z.B. an die Lichtschwächung durch einen Graufilter oder durch Wolken.

Warum wird im einen Fall der Energieverlust von einer Frequenzänderung begleitet, im anderen Fall aber nicht ?

Zur Beantwortung dieser Frage sollte man sich nach ähnlichen Phänomenen umschauen. Man stelle sich ein Gas in einem senkrechten Zylinder unter einem beweglichen Kolben vor, der mit Gewichten belastet ist. Werden die Gewichte entfernt, dann dehnt sich das Gas aus, wobei die Gasmoleküle gegen den Kolben Arbeit verrichten und infolgedessen kinetische Energie verlieren. Folglich nimmt die Temperatur des Gases ab. Man kann die Energie des Gases aber auch dadurch verringern, indem man einen Teil des Gases aus seinem Behälter ausströmen lässt. Während im ersten Fall die Zahl der Gasatome konstant bleibt und die Energie der einzelnen Atome abnimmt, verhält es sich im zweiten Fall genau umgekehrt. Die Zahl der Atome wird kleiner, aber die Energie der einzelnen Atome bleibt konstant, weshalb sich die Temperatur nicht ändert. Unter dem Eindruck der erwähnten Tatsachen wird nun die

folgende Erklärung zu dem Spiegelexperiment nahe gelegt: Die Lichtenergie ist in Wirkungseinheiten eingeteilt, die wir Photonen nennen. Der bewegte Spiegel vermindert die Energie der einzelnen Photonen, ein Filter schluckt Photonen, und vermindert damit die Energie eines Lichtstrahls. Die Frequenz des Lichtes ist von der Energie der Photonen abhängig.

Welche Beziehung besteht zwischen der Frequenz und der Photonenenergie ?

Die Frequenz- und Energieänderung während der Lichtreflexion werden nun berechnet.

1. Änderung der Frequenz

Ein Wellenzug der Länge $n \cdot \lambda$ wird während seiner Reflexion der Dauer t auf die Länge $n \cdot \lambda'$ gestreckt. Hat der Anfang des Wellenzugs den Spiegel erreicht, dann muss das Ende in einer Zeit t noch den Weg $n \cdot \lambda + v \cdot t$ zurücklegen bis es am Spiegel ankommt.

$$n \cdot \lambda + v \cdot t = c \cdot t \rightarrow t = n \cdot \lambda / (c-v)$$

Der Anfang des reflektierten Wellenzuges entfernt sich in dieser Zeit t vom Spiegel um

$$c \cdot t + v \cdot t = n \cdot \lambda' \rightarrow (c+v) \cdot t = n \cdot \lambda' \\ (c+v) \cdot t = n \cdot \lambda', \quad t = n \cdot \lambda / (c-v) \rightarrow (c+v) \cdot n \cdot \lambda / (c-v) = n \cdot \lambda'$$

$$(1.) \lambda / \lambda' = f' / f = (c-v) / (c+v)$$

2. Änderung der Energie

Der Spiegel erfährt in der Reflexionszeit t die Kraft $F = [m \cdot c - (-m' \cdot c)] / t$. m und m' sind die Lichtmassen vor und nach der Reflexion, $m \cdot c$ und $m' \cdot (-c)$ sind die Impulse des Lichtes vor und nach der Reflexion.

$$F = [m \cdot c - (-m' \cdot c)] / t = c \cdot (m + m') / t$$

Für die Arbeit des Lichtes gilt: $W = F \cdot v \cdot t = [c \cdot (m + m') / t] \cdot v \cdot t = v \cdot c \cdot (m + m')$

$v \cdot t$ beschreibt die Verschiebung des Spiegels in der Zeit t .

Für die Arbeit des Lichtes gilt auch: $W = (m - m') \cdot c^2$

Somit können wir schreiben: $v \cdot c \cdot (m + m') = (m - m') \cdot c^2$

$$v \cdot (m + m') = c \cdot (m - m') \rightarrow m' \cdot (c + v) = m \cdot (c - v)$$

$$(2.) m' / m = (c-v) / (c+v)$$

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt: $f' / f = m' / m$

Nach $E = m \cdot c^2$ verhalten sich die Massen m und m' zueinander wie die zugehörigen Energien E und E' .

$$f' / f = E' / E \rightarrow E' / f' = E / f$$

Für die Energien E_p und E'_p der Photonen gilt dann auch: $E'_p / f' = E_p / f = \text{Konstante}$.

Diese Konstante heißt Wirkungsquantum h .

$$E_p = h \cdot f$$

Mit diesem Gesetz kann der Photoeffekt erklärt werden, anhand dessen für h der Wert $6,62617 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ermittelt werden kann.

15. Das Zwillingsparadoxon

Man denke sich Zwillinge A und A' auf der Erde. A' steige in eine Rakete und fliege mit $2/3$ Lichtgeschwindigkeit durch den Weltraum. Nach einem Jahr komme er wieder nach Hause zu seinem Bruder. Da aus der Sicht von A alle Vorgänge in der Rakete zeitlich gedehnt

werden, ist A' dann weniger stark gealtert als A. Man könnte nun folgende als **Zwillingsparadoxon** bekannte Erklärung abgeben: A fliegt mit der Erde aus der Sicht von A' mit $2/3$ Lichtgeschwindigkeit. Was für A' gilt muss auch für A gelten. Damit kommt man zu dem unsinnigen Schluss: Jeder der beiden Zwillinge ist biologisch jünger als sein Zwillingsbruder.

Die Aussage „Was für A' gilt muss auch für A gelten“ trifft hier nicht zu, denn für A' gehen die Uhren auf der Erde erst dann langsamer als die Raketenuhren, wenn er nach dem Beschleunigungsvorgang die Uhren in seiner Rakete synchronisiert hat. Zunächst sieht A' nach dem Start seines Raumschiffs so wie sein Bruder A die Raketenuhren in einer langsameren Gangart als die irdischen Uhren. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass die Uhren in der Rakete aus der Sicht von A während des Starts synchron bleiben und deshalb aus der Sicht von A' nicht synchron sind.

Wir gehen davon aus, dass in der Rakete Uhren stehen (siehe Abb. 15.1), die unmittelbar vor der Beschleunigung zusammen mit den irdischen Uhren auf 0 eingestellt wurden. Während der Beschleunigung und danach zeigen diese Uhren aus der Sicht eines ruhenden Beobachters A gleiche Zeiten an.

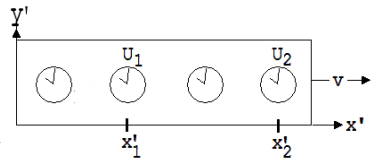


Abb. 15.1

Aus der Sicht von A' geht nach der Beschleunigung auf die Geschwindigkeit v die Uhr U_2 bei x'_2 gegenüber der Uhr U_1 bei x'_1 um $\Delta t' = (v/c^2) \cdot \Delta x'$ vor.

Begründung: Wenn A' die Uhren in der Rakete nach der Uhr U_1 synchronisiert hat, dann stellt der ruhende Beobachter A fest, die Uhr U_2 geht im Vergleich zu U_1 um $(v/c^2) \cdot \Delta x'$ ($\Delta x' = x'_2 - x'_1$!) nach. Deshalb muss sie vor der Synchronisation für den mitbewegten Beobachter A' um $(v/c^2) \cdot \Delta x'$ vorgegangen sein. Für A' gilt demnach direkt nach dem Beschleunigungsvorgang vor der Synchronisation:

$$t'_2 = t'_1 + (v/c^2) \cdot \Delta x', \quad t'_2 : \text{Zeitangabe der Uhr } U_2, \quad t'_1 : \text{Zeitangabe der Uhr } U_1$$

Für A' ist folgende Erklärung denkbar: Während des Beschleunigungsvorgangs mit der Beschleunigung $a' = (v/t'_1)$ nimmt die Uhr U_2 unter der Wirkung der Trägheitskräfte eine um $t'_2 / t'_1 = 1 + [(v/t'_1)/c^2] \cdot \Delta x' = 1 + [a'/c^2] \cdot \Delta x'$ schnellere Gangart als U_1 an.

Bei der Bestimmung der Beschleunigung a' im voran liegenden wie im nachfolgenden Fall wird $v \ll c$ vorausgesetzt. Andernfalls müsste man sich mit einem sehr komplizierten Sachverhalt auseinandersetzen. Dann müsste z.B. auch noch die Längenkontraktion der Rakete und deren Auswirkung auf den Gang der Uhren während des Beschleunigungsvorgangs berücksichtigt werden.

A' könnte die Beschleunigung seiner Rakete auch in der Rakete ermitteln, indem er darin die auf einen Körper der Masse m wirkende Trägheitskraft F_T misst und danach die Beschleunigung a' nach $a' = F_T / m$ bestimmt.

Da Trägheitskräfte sich ähnlich verhalten wie Gewichtskräfte, liegt die Vermutung nahe, dass sich Gewichtskräfte genauso auf Uhren auswirken könnten wie Trägheitskräfte. Die Gleichung $t'_2 / t'_1 = 1 + [a'/c^2] \cdot \Delta x'$ müsste dann auch für verschieden hoch liegende irdische Uhren U_2 und U_1 gelten, wenn man für $\Delta x'$ den Höhenunterschied h zwischen einer Uhr U_2 und einer tiefer stehenden Uhr U_1 einträgt und a' durch $g = F_G / m$ ersetzt. F_G ist die Gewichtskraft auf einen Körper der Masse m .

$$t_2 / t_1 = 1 + (g/c^2) \cdot h$$

t_2 und t_1 stehen für die Zeiten, die U_2 und U_1 für die Dauer eines bestimmten Ereignisses anzeigen. Der in der Gleichung zum Ausdruck kommende Gangunterschied konnte mit sehr genauen Atomuhren nachgewiesen werden.

Bei einem Höhenunterschied von 1000 m läuft die höhere Uhr während einer Stunde gegenüber der tieferen Uhr um $4 \cdot 10^{-10}$ Sekunden voraus.

Hieraus folgt, dass eine Lichtwelle eine Verminderung ihrer Frequenz erfährt (Rotverschiebung), wenn sie aus einem Gravitationsfeld aufsteigt. An höheren Orten laufen die Uhren schneller. Es wird dort eine größere Schwingungszeit und somit eine kleinere Frequenz gemessen. Auch diese Frequenzänderung konnte nachgewiesen werden.

Diese Sachverhalte lassen den Schluss zu:

In einem abgeschlossenen Raum kann man Gravitations- und Trägheitskräfte ohne Kenntnis ihrer Ursachen nicht unterscheiden.

Dieser Satz ist die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

16. Historisches zur Entwicklung der Relativitätstheorie

Die Spezielle Relativitätstheorie hat viele Väter. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist das Werk Einsteins.

Anmerkungen zur speziellen Relativitätstheorie im Lehrbuch für Theoretische Physik von Georg Joos (10. Auflage, 1959):

Die Zeittransformation hat bereits 1887 Voigt in einer wenig bekannten Arbeit vorgenommen. 1892 hat sie Lorentz für die Optik bewegter Körper aufgenommen. 1900 schrieb Lamor die Lorentztransformationen zuerst in der heute üblichen Form. 1904 erschien eine Arbeit von Lorentz, in der die Optik bewegter Körper ganz vom Standpunkt der Lorentztransformationen behandelt wurde. 1905 zogen unabhängig voneinander Poincaré und Einstein die folgenden Schlüsse aus den Lorentztransformationen:

1. Längenkontraktion und Zeitdilatation aus der Sicht bewegter Beobachter

2. Additionstheorem der Geschwindigkeiten

3. Dopplereffekt

Die Einsteinsche Arbeit enthielt darüber hinaus das fundamentale Gesetz der Trägheit der Energie.

Ausführliche Informationen über die Entwicklung der Relativitätstheorie enthält das Buch „**Raffiniert ist der Herrgott ...**“ von Abraham Pais (Vieweg-Verlag).

Diesem Buch ist zu entnehmen, dass Poincaré seine Arbeit am 5.6.1905 in der Académie des Sciences (Paris) vorstellte und Einstein seine Arbeit am 30.6.1905 in den Annalen der Physik veröffentlichte.

Das besondere Verdienst von Poincaré und Einstein für die Spezielle Relativitätstheorie ist der Beweis, dass die Lorentztransformationen im Einklang mit dem Relativitätsprinzip stehen. Erst als man sich darüber im Klaren war, was unter der Gleichzeitigkeit von Ereignissen zu verstehen ist (Synchronisation von Uhren), welche an verschiedenen Orten stattfinden, war die Voraussetzung für einen solchen Beweis gegeben. Einstein musste sich während seiner Tätigkeit im Berner Patentamt dieser Frage stellen. Anlass hierzu gaben Probleme bezüglich der Abfahrts- und Ankunftszeiten von Fernzügen - man denke an den Orientexpress.

„Das Gleiche lässt uns in Ruhe, aber der Widerspruch ist es, der uns produktiv macht.“

Johann Wolfgang von Goethe

