

Gerhard Höhne

Denken lernen
im Physik-
und
Mathematikunterricht

für Oberschüler, Lehrer
und...

Vorwort

Unter welchen Bedingungen wird gefragt, werden Vermutungen geäußert und etwas geglaubt ? Wie wird eine Behauptung bewiesen ?

Um diese Fragen geht es in dieser Broschüre. Sie sollten für Leute, besonders für Schüler von Interesse sein, die sich immer wieder um neue Erkenntnisse und um Klärung unverständlicher Sachverhalte bemühen müssen und es dabei mit Aufgaben zu tun haben, zu deren Lösung es keine genauen Rezepte gibt.

Man erwarte in dieser Broschüre nicht irgendwelche Wunderrezepte zur Lösung schwieriger Aufgaben. Es werden hier „nur“ natürliche Verhaltensweisen beschrieben zu denen der Mensch dank seiner Veranlagung unter bestimmten Bedingungen neigt.

Der geistig rege und neugierige Mensch ist immer darauf aus, sein eigenes Verhalten zu variieren, mit Dingen gedanklich zu experimentieren, sie zu ändern und zu ergänzen und mit Ähnlichem zu vergleichen. Fragen, Vermutungen und Schlussfolgerungen werden hierdurch veranlasst. Diese dem Erkenntnisgewinn dienenden Verhaltensweisen sollten bekannt sein, damit man nicht infolge unrealistischer Vorstellungen auf eine Art „**Nürnberger Trichter**“ hofft, denn unrealistische Hoffnungen können bekanntlich lähmen. Einem Schüler sollte vermittelt werden, dass hilfreiche Einfälle nicht ohne eigenes Zutun kommen, dass sein Interesse am Lernstoff im Wesentlichen davon abhängt, ob er mit Fantasie mitgeht, das Gebotene durch eigene Vorstellungen bereichert, es quasi in seinem Sinne ausmalt. Dies gilt sowohl im Unterricht, als auch beim Lesen eines Buches. Jedes Buch, das nicht mit reger Fantasie gelesen wird, bleibt weitgehend unverständlich und wirkt langweilig.

Gerhard Höhne

Inhaltsverzeichnis

1. Über die Bedingungen, die zu Fragen Anlass geben.....	1
2. Über Methoden, Antworten zu finden.....	3
3. Prüfung und Beweis einer Vermutung.....	8
4. Über den Glauben.....	12

Über die Bedingungen, die zu Fragen Anlass geben

Wenn eine Frage nicht aus einer Gewohnheit heraus gestellt wird, wie dies bei Kindern manchmal geschieht, dann ist sie normalerweise durch Unstimmigkeiten in der Welt unserer Vorstellungen, durch Abweichungen von dem, was wir erwarten oder durch eine Vermutung bedingt.

*„Das Gleiche lässt uns in Ruhe, aber der
Widerspruch ist es, der uns produktiv macht.“*

Johann Wolfgang von Goethe

Wenn jemand nach der Größe eines Hauses fragt, dann geschieht dies, weil er sich unterschiedliche Bilder über dieses Haus macht. Wird nach der Dauer eines Vorgangs gefragt, dann zeigt dies an, dass die fragende Person mit dem Vorgang eine Uhr im Sinne hat, zu der sie sich verschiedene Zeitangaben vorstellt. Hinter den mit warum, wie, welche, was, wer, wann, wo, wozu oder mit einem Verb oder einem Hilfsverb beginnenden Fragen stecken immer unterschiedliche Vorstellungen zu einer Gegebenheit.

Derjenige wird nur wenig fragen, der nicht dazu neigt, seine Vorstellungen immer wieder neu zu entwickeln, sie zu variieren und zu ergänzen. Das, woran man sich gewöhnt hat, wird nur selten hinterfragt.

Auf Unerwartetes kommt fast immer eine mit warum beginnende Frage.

Beispiele:

1. Ich habe als Physiklehrer den Unterricht zur Mechanik immer wieder mit Vorführungen zum Schwerpunktsatz begonnen. Ein Schüler wurde gebeten, sich auf ein großes Brett zu legen, welches auf zwei darunter liegenden Rohren gut hin und her bewegt werden konnte. Als die Mitschüler an dem angeschlossenen Messgerät sahen, dass sich das Brett im Takt des Herzschlags hin und her bewegte, wurde immer sofort die Frage nach der Ursache dieser Bewegung gestellt, weil diese von den Schülern nicht erwartet wurde.

2. Mit einem sogenannten Drahtmesswandler (siehe g-hoehne.de) habe ich den Schülern gezeigt, wie sich der elektrische Widerstand eines Drahtes bei Verformung ändert. Dass der Widerstand bei einer Dehnung zunimmt, haben die Schüler fraglos hingenommen, aber nicht, dass er bei einer Biegung abnimmt, da haben sie das Gegenteil erwartet.

3. Eine Abweichung vom Gewohnten ist etwas Unerwartetes und deshalb ein Grund zu einer Frage. Einer meiner Enkel, er war vier Jahre alt, hat mir hierzu ein Beispiel geliefert. Während eines Telefonats mit ihm hörte er das Flöten einer in meiner Nähe sitzenden Amsel. Er war gewohnt, meine Stimme im Telefon zu hören, nicht aber eine Vogelstimme. Somit kam von ihm die Frage: „Wie kommt der Flötenton der Amsel durch das Telefon zu mir?“

Fragen werden häufig durch Vermutungen veranlasst.

Bei einer Vermutung wird entweder nach ihrer Richtigkeit gefragt oder aber es wird eine Frage mit „warum“ gestellt, wenn sie sich als falsch erweist. Eine Vermutung ist im Gegensatz zu einem Glauben rationaler Natur. Ähnlichkeiten regen zu Vermutungen an. Eine Vermutung kann fast immer als Ergebnis eines Vergleichs gesehen werden. Zeigen zwei Dinge A und B gewisse Übereinstimmungen, dann wird auf weitere übereinstimmende Merkmale, möglicherweise auch auf Gleichheit geschlossen. Was bei A erkannt wird, wird bei B hinzu gedacht (vermutet). Wenn man wünscht, dass sich zu einer interessant wirkenden Erscheinung erhellende Vermutungen einstellen, dann sollte man damit gedanklich

experimentieren. Dabei fallen oft Merkmale auf, die man bei passiver Ansicht gar nicht wahrnimmt.

Vermutungen schaffen eine gewisse Spannung. Man möchte wissen, ob sie zutreffen. Deshalb sollte sich ein Lehrer bei der Planung seines Unterrichts die Frage stellen: „Wie kann ich meine Schüler zu Vermutungen anregen, die zu dem führen, was ich vermitteln möchte?“

Unter welchen Bedingungen stellen sich Vermutungen ein? Zu dieser Frage werden im Folgenden einige Beispiele vorgestellt.

1. Beispiel:

In der Abb. 1 sind zwei Gegenstände zum Vergleich dargestellt. Links ist ein geladener Plattenkondensator skizziert, dessen Platten über einen geöffneten Schalter miteinander verbunden sind. Rechts ist ein U-Rohr zu sehen, dessen Schenkel durch einen

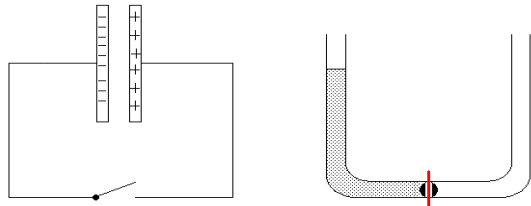


Abb. 1

zunächst geschlossenen Hahn getrennt sind. Der eine Schenkel ist mit Wasser gefüllt. Wird der Hahn geöffnet, dann schwingt das Wasser von einem Schenkel zum anderen und zurück.

Vermutung: Die Elektronen schwingen nach dem Schließen des Schalters zwischen den beiden Kondensatorplatten hin und her.

2. Beispiel:

Zum Vergleich kommen Modelle in Frage. Unter einem Modell versteht man ein erdachtes Gebilde, welches mit einem Gegenstand der Natur charakteristische Merkmale gemeinsam hat. So wird z.B. eine Vielzahl kleiner Kugeln, die in einem Gefäß hin und her schwirren, als Modell eines Gases genommen. Derjenige, der es für möglich hält, dass die Kraft der Teilchen auf die Wand berechenbar ist, wird vermuten, dass das, was bei einer solchen Rechnung herauskommt, auf ein reales Gas übertragbar ist.

Erscheint das Modell zur Berechnung zu kompliziert, dann wird es im Sinne besserer Berechenbarkeit geändert. Die Teilchen im Gasmodell kann man z.B. an der Innenseite einer Hohlkugel entlang gleiten lassen. Erneut wird man von einer Vermutung geleitet, nämlich der, dass das so gewonnene Ergebnis auch für das komplexere Modell gültig ist.

Die Kraft eines Teilchens auf die Wand ist unter diesen Umständen gleich $n \cdot m \cdot v^2 / r$.

n Teilchen üben somit die Kraft $F = n \cdot m \cdot v^2 / r$ aus.

Für den Druck p auf die Gefäßfläche $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ gilt demnach:

$$p = F / A = F / (4 \cdot \pi \cdot r^2) \rightarrow p = (n \cdot m \cdot v^2 / r) / (4 \cdot \pi \cdot r^2) \rightarrow p = n \cdot m \cdot v^2 / (4 \cdot \pi \cdot r^3)$$

Die Gleichung muss so umgewandelt werden, dass sie formal zu jedem mit Gas gefüllten Gefäß passt. $4 \cdot \pi \cdot r^3$ kann als das dreifache Kugelvolumen V durch $3 \cdot V$ ersetzt werden.

$$p \cdot V = (1/3) \cdot n \cdot m \cdot v^2 \rightarrow p \cdot V = (2/3) \cdot n \cdot (m \cdot v^2/2)$$

Stimmt diese Gleichung für ein reales Gas?

Dieser Frage muss man sich nun stellen.

Wir vermuten manchmal, dass zwei Dingen einander gleich sind, wenn sie in wesentlichen Merkmalen übereinstimmen. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn wir auf der Suche nach einem Term zur Berechnung einer bestimmten Größe in folgender Weise vorgehen:

Zunächst wird nach Merkmalen eines solchen Terms gefragt, es können z.B. Ergebnisse sein, welche dieser unter bestimmten Bedingungen liefert. Hiernach werden Terme mit diesen Merkmalen gesucht und auf ihre Gültigkeit geprüft. Beispielhaft hierfür sind die Schlussfolgerungen anhand von Einheiten.

1. Beispiel:

Als Physiklehrer habe ich oft vor der Herleitung der für die Zentripetalkraft F gültigen Gleichung versucht, die Schüler zu Vermutungen über die Beschaffenheit einer solchen Gleichung anzuregen. Auf die Frage, welche Größen für die Kraft entscheidend seien, wurde meistens schnell die Geschwindigkeit v , des Bahnradius r und die Masse m des kreisenden Gegenstands genannt. Daraufhin habe ich auf die Einheiten von r , v , m und F aufmerksam gemacht mit dem Hinweis, dass v , r und m so verknüpft werden müssen, dass ein Term mit der Einheit $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{Newton}$ entsteht.

$$[v] = \text{kg}, [v] = \text{m/s}, [r] = \text{m}, [F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2, [v^2 \cdot m / r] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \rightarrow \text{Vermutung: } F = v^2 \cdot m / r$$

Terme in eckigen Klammern stehen für die zugehörigen Einheiten.

2. Beispiel:

Es wird angenommen, dass die Schallgeschwindigkeit v durch die Luftdichte ρ und den Luftdruck p bestimmt ist.

$$[\rho] = \text{kg/m}^3, [p] = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2), [p/\rho] = \text{m}^2 / \text{s}^2 \rightarrow \text{Vermutung: } v \sim \sqrt{(p/\rho)}$$

Von anderer Art ist das folgende 3. Beispiel aus der Mathematik

Es solle eine Gleichung gefunden werden, welche es ermöglicht, den Flächeninhalt A eines Dreiecks anhand der Seitenlängen a , b und c zu

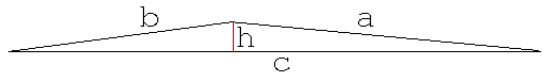


Abb. 2

berechnen. Es wird nach Merkmalen eines solchen Terms gefragt. Im Sinne dieser Frage sind Gedankenexperimente mit dem Dreieck hilfreich. Bei Verkleinerung einer Höhe fällt auf, dass ein Term für den Flächeninhalt den Wert 0 ergeben muss, wenn eine Seite gleich dem halben Umfang $s = (a+b+c)/2$ ist. Auch mit schwindendem s muss dieser Term gegen 0 gehen. Ein Term mit diesen Eigenschaften ist das Produkt $s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)$. Dieser Term kommt aber nicht für den Flächeninhalt in Frage, weil er als Einheit m^4 oder cm^4 hat.

$$\text{Vermutung (Heronsche Dreiecksformel): } A = \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)]}$$

Über Methoden, Antworten zu finden

Oft kann zu einer gestellten Frage nach einem genau bekannten Verfahren eine Antwort gefunden werden. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn nach einer Größe gefragt wird, die mit Hilfe eines bekannten Gesetzes berechnet oder unter Zuhilfenahme vorhandener Geräte gemessen werden kann. Wir haben es aber auch mit Fragen zu tun, die nicht in dieser einfachen Weise beantwortet werden können.

Wenn dies der Fall ist, dann sammeln wir Informationen über den in Frage stehenden Gegenstand und vermehren diese Informationen durch Folgerungen, die wir daraus ziehen können. Auch Dinge, diesem Gegenstand ähnlich sind, werden in Betracht gezogen. Beim

Sammeln von Informationen sind Gedankenexperimente mit dem zu erforschenden Gegenstand sehr hilfreich. Deshalb ist die folgende Frage angebracht:

Was kann ich mit dem Gegenstand tun, was kann ich an ihm beobachten und messen ?

Die Wege zu einer Antwort sind entweder **induktiver** oder **deduktiver** Natur. Unter einer Induktion (kommt von lat. inducere = hineinführen) versteht man den Schluss von Erfahrungen auf ein Naturgesetz. Die Deduktion (kommt von lat. deducere = wegführen) ist eine Folgerung aus einem oder mehreren bekannten Naturgesetzen. Wenn z.B. der Fallweg eines Steines mit Hilfe der Gleichung $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ berechnet wird, dann spricht man von einer Deduktion. Die Ermittlung des Fallgesetzes anhand von tabellarisch angeordneten Messdaten nennt man eine Induktion.

Induktionen

Wird eine Tabelle aus Messwertepaaren zusammengestellt, dann geschieht dies oft mit der Absicht, eine konstante Verknüpfung von Messwerten zu finden.

1. Beispiel:

Die hier vorliegende Tabelle enthält in den ersten beiden Spalten die Zeiten, die zu dem Fall einer Eisenkugel aus verschiedenen Höhen gemessen wurden.

Fallweg s	Fallzeit t	$v_M = s / t$	$v_M / t = s / t^2$
0,5 m	0,31 s	1,61 m/s	5,2 m/s ²
1 m	0,45 s	2,22 m/s	4,93 m/s ²
1,5 m	0,56 s	2,7 m/s	4,8 m/s ²
2 m	0,64 s	3,13 m/s	4,89 m/s ²

Es wird zunächst geprüft, ob die mittlere Geschwindigkeit v_M konstant ist. Daraufhin wird $v_M / t = s / t^2$ einer gleichen Prüfung unterzogen. Es stellt sich heraus, dass zweite Term im Rahmen der Messgenauigkeit konstant ist. Der Mittelwert der v_M / t -Werte beträgt 4,955 m/s². Dies bedeutet:

$$s / t^2 = 4,955 \text{ m/s}^2 \rightarrow s = 4,955 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

2. Beispiel:

Es soll eine Formel gefunden werden, mit der die Summe S_N von N Quadratzahlen $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + N^2$ berechnet werden kann.

Wir legen eine Tabelle an, in deren zweiter Spalte die mit $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ nummerierten Werte $1^2, 1^2 + 2^2, 1^2 + 2^2 + 3^2, 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots$ stehen.

N	S_N	S_N / N	$(S_N / N) \cdot 6$	$(S_N / N) \cdot 6 / (2 \cdot N + 1)$	$[(S_N / N) \cdot 6 / (2 \cdot N + 1)] / (N + 1)$
1	1	1	6	2	1
2	5	2,5	15	3	1
3	14	4,666666....	28	4	1
4	30	7,5	45	5	1
5	55	11	66	6	1
6	91	15.16666....	91	7	1

Auf der Suche nach einem aus S_N und N bestehenden konstanten Term werden zunächst die Quotienten S_N/N berechnet. Leider kommen dabei keine ganzen Zahlen heraus. In der 3. Zeile steht $4,66666... = 4 + 2/3$ und in der 6. Zeile $15,1666666... = 15 + 1/6$.

Deshalb wird $(S_N/N) \cdot 6$ gebildet, Es ist erkennbar, dass die Werte $(S_N/N) \cdot 6$ durch $(2 \cdot N + 1)$ teilbar sind. Hierbei entsteht die Zahlenfolge 2, 3, 4, 5.... Aus dieser Folge wird nach Division durch n eine Folge aus Einsen. Somit gilt:

$$[(S_N/N) \cdot 6 / (2 \cdot N + 1)] / (N + 1) = 1 \rightarrow S_N = (1/6) \cdot N \cdot (2 \cdot N + 1) \cdot (N + 1)$$

Manchmal wird eine solche Tabelle auch deshalb aufgestellt, weil man eine Entwicklungstendenz an den geordneten, tabellierten Werten erkennen möchte, die eine Schätzung eines nicht messbaren Wertes ermöglicht.

Man spricht in einem solchen Fall entweder von Interpolation oder Extrapolation, je nachdem ob der Schätzwert zwischen oder nicht zwischen den geordneten Messwerten liegt.

Beispiel:

Es solle die Temperaturzunahme ΔT bestimmt werden, die eine bestimmte Menge Wasser bei einer Energiezufuhr ΔE erfährt. Zur Messung des Wertes ΔT müsste die Energie ΔE schlagartig zugeführt werden, denn andernfalls wird der Messwert durch Wärmeabfluss an die Umgebung verfälscht. Da diese schlagartige Energiezufuhr nicht möglich ist, bestimmt man die Temperaturzunahme bei verschiedenen Erwärmungszeiten t . ΔE hat in jedem Fall den gleichen Wert. Die hierbei ermittelten Werte ΔT werden grafisch in Abhängigkeit von der Erwärmungszeit t dargestellt. Die Fortsetzung des Grafen bei Annäherung an $t = 0$ wird geschätzt, er weist auf den gesuchten Wert ΔT hin.

Deduktionen

Wie lang ist die Schwingungszeit T eines Federpendels ? Wie groß ist die Zentralkraft auf einen kreisenden Körper ? Wie lang ist der Bremsweg eines bremsenden Autos ?

Dies sind Fragen, wie sie im Physikunterricht gestellt werden. Die Antwort soll normalerweise deduktiv gefunden werden.

Nur manchmal ist eine Gleichung bekannt, welche die Berechnung der gesuchten Größe x sofort ermöglicht. In der Mehrzahl aller Fälle müssen zunächst zum Sachverhalt passende Gleichungen hergeleitet werden. Hilfreich ist hierbei eine genaue Beschreibung des in Frage stehenden Gegenstandes G , eine Skizze von G mit zugehörigen Kenngrößen ist angebracht. Da auch Gleichungen mit unbekannten Kenngrößen hilfreich sein können, sollte man sich beim Anlegen der Skizze nicht auf die in der Aufgabe angegebenen und gesuchten Kenngrößen beschränken.

Was kann ich mit den angegebenen Größen berechnen ?

Diese Frage hilft bei der Suche nach einer Gleichung mit der gesuchten Größe x . Auch hier muss wieder betont werden, dass oft erst bei Gedankenexperimenten mit dem Untersuchungsgegenstand Wichtiges auffällt und hilfreiche Einfälle kommen. Als ein Gedankenexperiment kann auch die Änderung der Anschauung gesehen werden.

Anmerkung: Als Experiment gilt hier jede Handlung, die deshalb ausgeführt wird, weil man annimmt, sie könne zu neuen Erkenntnissen führen.

Findet man eine Gleichung, in der neben x noch andere unbekannte Größen y , z ,... enthalten sind, dann müssen weitere Gleichungen mit x , y , z ,... aufgestellt werden, damit die

unerwünschten Unbekannten ersetzt werden können.

Oft ist es sinnvoll nach ähnlichen Aufgabenstellung zu fragen, denn in den dazu gehörenden Lösungen könnten hilfreiche Hinweise erkennbar sein.

1. Beispiel:

Es soll die Schwingungszeit T berechnet werden, nach der eine bestimmte Wassermenge in einem U-Rohr zu schwingen vermag.

Die hierzu passenden Kenngrößen sind die Länge L des mit Wasser gefüllten Rohrabschnitts, der Rohrquerschnitt A , die Masse m und die Dichte ρ des Wassers. Als ähnliche Aufgabe ist die Berechnung der Schwingungszeit zu einem Federpendel mit dem

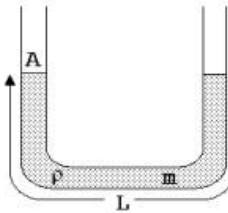


Abb.3

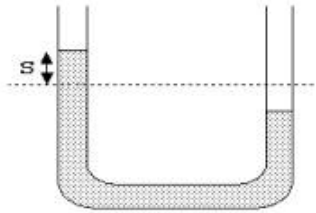


Abb.4

Ergebnis $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(m/D)}$ zu nennen. Bei gedanklichen Umgang mit dem U-Rohr wird an das Hineinblasen gedacht. Bei einem solchen Experiment steigt die Flüssigkeit in einem Schenkel um $2 \cdot s$ über die des anderen Schenkels (siehe Abb. 3.4). Der Buchstabe s steht für die Abweichung von der Ruhelage.

Überlegungen zu diesem Experiment: Die Flüssigkeitssäule der Höhe $2 \cdot s$ bewirkt eine zurücktreibende Kraft F . Es kann eine der Federkonstanten D entsprechende Größe $D = F/s$ berechnet werden.

$$F = 2 \cdot s \cdot A \cdot \rho \cdot g \rightarrow D = 2 \cdot \rho \cdot A \cdot g$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(m/D)}$ und $m = L \cdot A \cdot \rho$ finden wir:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{[L / (2 \cdot g)]}$$

Wird eine Gleichung zur Beschreibung einer bestimmten Bedingung gesucht, dann sollte man die Entwicklungen zu dieser Bedingung hin untersuchen.

1. Beispiel:

Es solle der Umkehrpunkt eines nach oben geworfenen Körpers berechnet werden. Verfolgt man die Entwicklung zum Umkehrpunkt hin, dann fällt auf, dass die Geschwindigkeit v bei Annäherung an den Umkehrpunkt 0 wird. Als Bedingungsgleichung wird daraufhin $v = v_{\text{Start}} - g \cdot t = 0 \leftrightarrow t = v_{\text{Start}} / g$ aufgestellt.

$$\text{Daraus folgt: } s = (1/2) \cdot g \cdot t^2 = (1/2) \cdot v_{\text{Start}}^2 / g$$

2. Beispiel:

Auf einen großen Zylinder mit dem Radius r (siehe Abb. 5) werde ein Klötzchen aufgesetzt, welches an einem Zylinder reibungsfrei abgleite. Bei einem bestimmten Wert des Drehwinkels ϕ löst sich dieses Klötzchen vom Zylinder.

Was gilt während der Ablösung?

Hier ist erkennbar, dass sich die Richtung der aus Gewichts- und Zentrifugalkraft resultierende Kraft F bei Annäherung an den Ablösepunkt der Bewegungsrichtung anpasst.

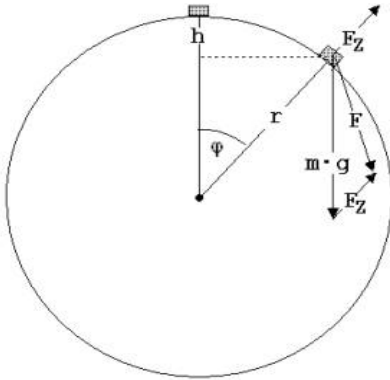


Abb. 5

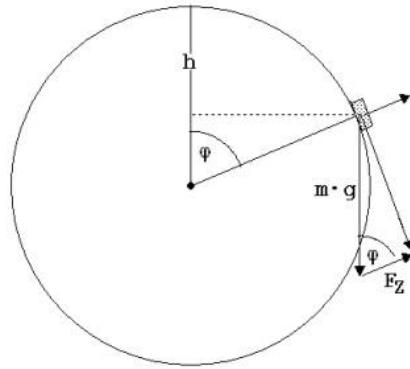


Abb. 6

Wie groß ist dieses φ ?

Der Radius r , der Drehwinkel φ , die Höhendifferenz h zwischen dem Ablösepunkt und dem Scheitel des Zylinders, die Gewichtskraft $m \cdot g$, die Zentrifugalkraft $F_Z = m \cdot v^2 / r$ (aus der Sicht eines Beobachters, der das Klötzchen begleitet) und die resultierende Kraft F werden vermerkt.

$$\text{Bedingungsgleichung: } \cos \varphi = F_Z / (m \cdot g) \rightarrow \cos \varphi = m \cdot v^2 / (r \cdot m \cdot g)$$

$$\cos \varphi = m \cdot v^2 / (r \cdot m \cdot g), \quad m \cdot v^2 / 2 = m \cdot g \cdot h \quad (E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}!) \rightarrow h = r - r \cdot \cos \varphi = r \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) / (r \cdot g) \rightarrow \cos \varphi = 2 - 2 \cdot \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = 2/3 \rightarrow \varphi = 48,2^\circ$$

Eine Änderung in der Betrachtungsweise bringt bekanntlich oft völlig unerwartete Einsichten.

Beispiel:

Wird ein beiderseits straff eingespanntes Seil angeschlagen, dann zieht die hierdurch verursachte Verformung als Welle über das Seil.

Wie groß ist die Geschwindigkeit v der Seilwelle ?

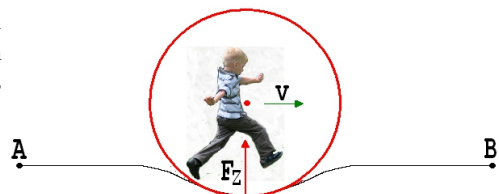


Abb. 7

Die Berechnung der Geschwindigkeit, mit der sich eine Seilwelle ausbreitet erscheint zunächst sehr schwierig.

Wie soll $F = m \cdot a$ angewandt werden ?

Man muss mit den Augen eines Beobachters schauen, der die Verformung (Wellenberg) mit der Wellengeschwindigkeit v begleitet. Er sieht das Seil unter dem Einfluss von Zentralkräften F_Z mit v durch einen Bogen fließen.

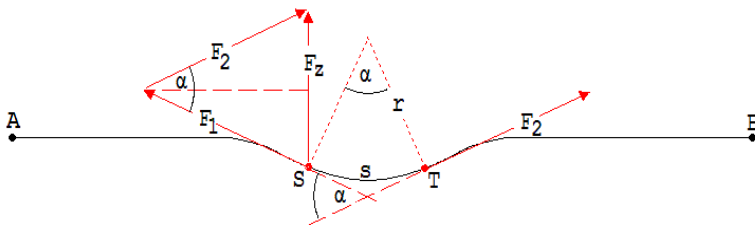


Abb. 8

Wir betrachten ein Bogenstück s aus dieser Seilwelle zwischen den Punkten S und T mit der Masse m (Abb. 8). Die Zentripetalkraft $F_z = m \cdot v^2 / r$ auf dieses Bogenstück ist die Resultierende der bei S und T angreifenden Fadenzugkräfte F_1 und F_2 mit übereinstimmenden Beträgen F. r ist der sogenannte Krümmungsradius von s. Hierunter verstehen wir den Radius des Kreises, der dem Bogenstück s angepasst werden kann.

$$F_z/2 = F \cdot \sin(\alpha/2) \rightarrow F_z = 2 \cdot F \cdot \sin(\alpha/2) \rightarrow m \cdot v^2 / r = 2 \cdot F \cdot \sin(\alpha/2)$$

$$m/s = \sigma \quad (\sigma = \text{längenbezogene Dichte}) \rightarrow m = s \cdot \sigma$$

$$s = \alpha \cdot r \quad (\alpha = \text{Winkel im Bogenmaß}) \rightarrow m = \alpha \cdot r \cdot \sigma$$

Setzt man $\alpha \cdot r \cdot \sigma$ für m in $2 \cdot F \cdot \sin(\alpha/2) = m \cdot v^2 / r$ ein, dann gelangt man zu:

$$2 \cdot F \cdot \sin(\alpha/2) = \alpha \cdot r \cdot \sigma \cdot v^2 / r \rightarrow 2 \cdot F \cdot \sin(\alpha/2) = \alpha \cdot \sigma \cdot v^2$$

Bei kleinen Winkeln α kann geschrieben werden: $\sin(\alpha/2) = \alpha/2$

$$2 \cdot F \cdot \sin(\alpha/2) = \alpha \cdot \sigma \cdot v^2 \rightarrow 2 \cdot F \cdot \alpha/2 = \alpha \cdot \sigma \cdot v^2 \rightarrow F = \sigma \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{(F/\sigma)}$$

Prüfung und Beweis einer Vermutung

Vermutungen müssen auf Übereinstimmung mit der Wirklichkeit geprüft oder bewiesen werden. Manchmal besteht eine Prüfung in einigen Messungen. Ist diese Prüfung nicht auf eine derart einfache Weise möglich, dann müssen aus der Vermutung Folgerungen gezogen und auf Übereinstimmung mit der Wirklichkeit geprüft werden.

Es ist zu fragen: „Was muss gelten, wenn die Vermutung zutrifft?“

Auf diese Frage hin werden Experimente mit dem Gegenstand der Vermutung erdacht und deren Verlauf unter Berücksichtigung der Vermutung überlegt. Wird diese Überlegung dann als richtig erkannt, dann hat man ein Argument, welches für die Richtigkeit der Vermutung spricht. Man kann sogar von einem Beweis sprechen, wenn die Überlegung nur bei Gültigkeit der Vermutung richtig sein kann.

1. Beispiel:

Es wird vermutet, dass ein Gas aus vielen kleinen Teilchen besteht. Als Experiment könnte man hier die Trübung des Gases durch Rauch erwägen. Die Rauchteilchen werden nach der gegebenen Vermutung infolge immer wiederkehrender Zusammenstöße mit Gasteilchen zittern müssen. Dieser Sachverhalt ist nachgewiesen und dient als Begründung für die Vermutung.

2. Beispiel:

Es wird vermutet, dass auf einem ungeladenen Körper beide Arten von Elektrizität in gleichen Mengen vorhanden sind. Ein mögliches Experiment mit einem ungeladenen Körper

ist seine Annäherung an einen geladenen Hartgummistab. Nach der geäußerten Vermutung ist dann eine Trennung der positiven und negativen Körperladungen zu erwarten. Diese Trennung ist nachweisbar (Influenz).

Die hier gegebenen Begründungen sind keine Beweis. Anhand der experimentellen Befunde, die in den letzten Beispielen zur Begründung der Vermutung angegeben wurden, kann nicht, wie bei einem Beweis üblich, mit Sicherheit auf die Vermutungen geschlossen werden. So kann z.B. das Zittern eines Rauchteilchens neben stoßenden Gaspertikeln auch andere Ursachen haben.

Beweisen heißt: eine Behauptung aus gültigen Tatsachen in eindeutiger Weise erschließen.

Hierbei werden nicht nur aus den Voraussetzungen, sondern auch aus den zu beweisenden Behauptungen Folgerungen gezogen. Man möchte auf diese Weise leichter beweisbare, gleichbedeutende Behauptungen finden.

1. Beispiel:

In dem Physikunterricht des Gymnasiums geht man bei der Berechnung des in der Tiefe h herrschenden Wasserdrucks normalerweise von einer Anordnung aus, wie sie links in der Abb.9 gezeigt wird. In der Abb. 9 sind zwei in Wasser eingetauchte Rohre R_1 und R_2 mit gleicher Querschnittsfläche A zu sehen, die unten im Wasser auf gleicher Höhe mit beweglichen Kolben verschlossen sind. Das Wasser drückt auf den Kolben im linken Rohr von oben. Die Gewichtskraft F des genau

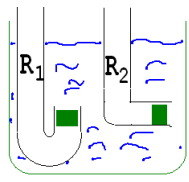


Abb. 9

darüber stehenden Wassers wird schnell als die auf ihn wirkende Kraft erkannt. Nach Berechnung des Drucks p nach $p = F/A$ wird **behauptet** aber meistens nicht bewiesen, dass das so gewonnene Ergebnis auch für einen anders ausgerichteten Kolben gilt, beispielsweise für einen solchen in einer Lage wie in R_2 .

Folgerungen aus der Behauptung:

Bei einer Verschiebung des Kolbens in R_1 gegen das Wasser wird die gleiche Arbeit verrichtet, wie bei gleicher Verschiebung in R_2 .

Diese Folgerung ist richtig, denn in beiden Fällen wird die Lageenergie des Wassers um den gleichen Wert erhöht, weshalb die Arbeiten und somit auch die Drucke übereinstimmen müssen.

2. Beispiel:

Behauptung: Es gilt die Heronsche Dreiecksformel $A = \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)]}$

Folgerung aus der Behauptung:

Wenn b , a und c und s durch die Variablen h , d und e ausgedrückt werden, dann liefert $s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)$ nach Umformungen den für A^2 gültigen Term $h^2 \cdot (d + e)^2 / 4$.

$$A = h \cdot (d + e) / 2, \quad s = (a + b + c) / 2 !$$

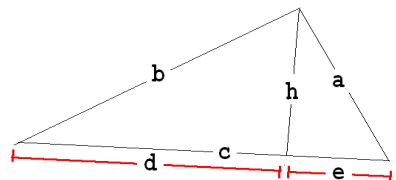


Abb. 10

$$s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) = (1/16) \cdot (a + b + c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b - c)$$

$$\text{Mit } b^2 = d^2 + h^2, \quad a^2 = h^2 + e^2 \quad \text{und} \quad c^2 = (d + e)^2 = d^2 + 2 \cdot d \cdot e + e^2$$

erhält man nach einigen einfachen Umformungen:

$$s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) = \frac{1}{4} \cdot (d + e)^2 \cdot [(d^2 + h^2) - d^2] = \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot (b^2 - d^2) = \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot h^2 = A^2$$

Damit ist die Heronsche Dreiecksformel bewiesen.

3. Beispiel

Behauptung: $S_N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots N^2 = (1/6) \cdot N \cdot (2 \cdot N + 1) \cdot (N + 1)$

Folgerung aus der Behauptung: Die Summenformel muss einen um $(n+1)^2$ höheren Wert liefern, wenn für N statt n der um 1 größere Wert $n + 1$ eingesetzt wird, denn es gilt: $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

Die Gleichung $(1/6) \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot (n+1)+1) \cdot ((n+1)+1) = (1/6) \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1) \cdot (n+1) + (n+1)^2$ kann leicht bewiesen werden. Dazu muss nur mit den in Klammern stehenden Termen multipliziert werden.

Damit steht fest, dass die Formel für $N = n + 1$ gilt, wenn sie für $N = n$ richtig ist. Da die Gleichung für $N = 1$ richtig ist, gilt sie für alle N, denn sie ist für $N = 2$ richtig, weil sie für $N = 1$ zutrifft und für $N = 3$, weil sie für $N = 2$ gilt usw..

Schluss von n auf n+1 oder **Vollständige Induktion** heißt ein Beweis dieser Art.

4. Beispiel

Eine Strecke [AB] sei durch die Punkte C und D innen und außen im gleichen Verhältnis geteilt. Durch C und D verlaufe ein Kreis, dessen Mittelpunkt M zwischen C und D liegt.

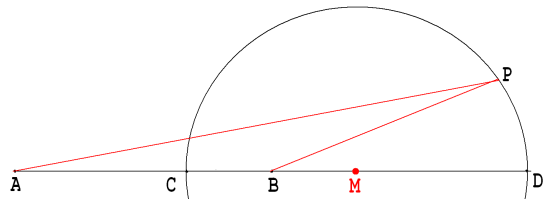


Abb. 11

Behauptung:

Es gilt der **Satz des Apollonius**, er

besagt, dass die Abstände eines Kreispunktes P von A und B sich so zueinander verhalten wie die Abstände des Punktes C von A und B.

$$\text{Aus } \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} \text{ folge: } \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$

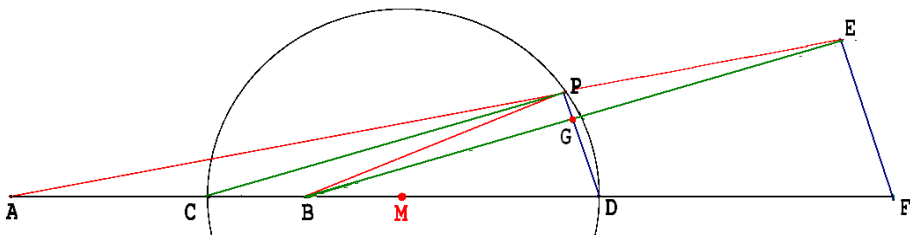


Abb. 12

Folgerungen aus der Behauptung:

1. $\overline{PE} = \overline{PB}$, denn für die Strecke [PE] gilt nach dem Strahlensatz $\frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ und

zur Strecke [PB] wird behauptet: $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$.

Der Punkt E ist der Schnittpunkt der Geraden AP mit einer durch den Punkt B gehenden Parallelen zur Geraden CP.

2. Das Dreieck BPE ist gleichschenkelig.

3. Die Gerade PD, welche die Strecke [BE] nach dem Satz des Thales in einem Punkt G rechtwinklig schneidet, halbiert [BE], weil das Dreieck BEP gleichschenkelig ist.

Die letzte Aussage ist leicht zu beweisen.

Nach dem Strahlensatz teilt G die Strecke [BE] so wie D die Strecke [BF].

F ist der Schnittpunkt der Geraden AD mit der Parallelen zu PD durch den Punkt E.

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} \implies \overline{DF} = \overline{DB}$$

D halbiert demnach die Strecke [BF] und demzufolge halbiert G die Strecke [BE]. Die Dreiecke BGP und GEP stimmen deshalb in den Seiten überein, welche den rechten Winkel bilden und sind infolgedessen nach dem Seite-Winkel-Seite-Satz kongruent.

Hieraus folgt: $\overline{PE} = \overline{PB}$ und wegen $\frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ gilt: $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$

5. Beispiel:

Behauptung: Nach dem **Lehrsatz von Pythagoras** sind die Quadrate über den Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks zusammen genauso groß wie das Quadrat über der Hypotenuse c.

Folgerung aus der Behauptung:

$$a^2 + b^2 = c^2 \leftrightarrow (a+b)^2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

An der Abb.13 ist zu erkennen, dass diese Folgerung richtig ist.

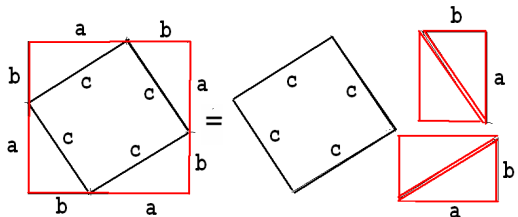


Abb. 13

6. Beispiel:

Behauptung: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich wie deren Mittelsenkrechten in einem Punkt.

Folgerung aus der Behauptung: Die Höhen in dem Dreieck ABC könnten die Mittelsenkrechten in einem Dreieck A'B'C' sein, welches aus den Parallelen zu den Seiten des Dreiecks ABC durch die Eckpunkte dieses Dreiecks gebildet wird.

Diese Behauptung ist wie die Behauptung des Beispiels 5 sofort anhand der nebenstehenden Abbildung als richtig erkennbar.

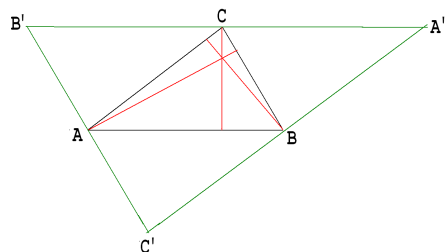


Abb. 14

Das Viereck ABA'C ist ein Parallelogramm. Daraus folgt, dass [BA'] gleich [AC] ist. Das Viereck AC'BC ist ebenfalls ein Parallelogramm. Daraus folgt, dass [BC'] gleich [AC] ist. Die von B ausgehende Höhe ist somit eine Mittelsenkrechte im Dreieck A'B'C'.

In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die Höhen von A und C ebenfalls Mittelsenkrechten im Dreieck A'B'C' sind.

Über den Glauben

Der Leser wundert sich sehr wahrscheinlich darüber, dass in dieser Broschüre ein Kapitel über den Glauben zu finden ist. Glauben hat zwar nichts mit logischem Denken zu tun, aber ein Glaube kann als Vorurteil das Denken in eine falsche Richtung lenken. Deshalb sollte man die Hintergründe eines Glaubens kennen.

Wenn es um Glaubensangelegenheiten geht, dann sind immer Gefühle im Spiel, die sehr leidenschaftlich sein können und keine sachliche Erörterung zulassen. Oft enden Diskussionen über Glaubensfragen mit den Worten „Ich spreche nicht mehr mit Dir!“ oder „Ich breche jetzt dieses Gespräch ab!“. Jedermann weiß, wie empfindlich religiös veranlagte Leute reagieren, wenn Zweifel an ihrem Glauben geäußert werden. Sie fürchten haltlos zu werden, wenn ihnen der Glaube genommen wird, und sehen deshalb den Zweifler wie einen Bösewicht an. Auch normalerweise sehr rational veranlagte Menschen können in Glaubensangelegenheiten sehr unsachlich werden, wenn z.B. Dinge angezweifelt werden, die ihnen viel bedeuten. Man denke an den Streit um die Relativitätstheorie in den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts. Zu den Gegnern dieser Theorie gehörten die bekannten Physik-Nobelpreisträger Philipp Lenard und Johannes Stark. Sie machten diese Theorie auf höchst unsachliche Art schlecht, weil sie mit ihrem Glauben über Raum und Zeit nicht vereinbar war. Von jüdischer Physik war die Rede.

Eine sachliche Diskussion über Glaubenssätze ist nur mit Leuten möglich, die nach den Hintergründen ihres Glaubens fragen, die sich immer wieder der Frage stellen, warum sie dieses und jenes glauben. Im Sinne einer solchen selbstkritischen Betrachtung soll hier auf die Fragen eingegangen werden: **Warum glauben wir ? Wie ist es zu verstehen, dass Glaubenssätze angenommen werden, die den Alltagserfahrungen völlig widersprechen ?** Man denke an den heute weit verbreiteten Glauben, dass sich Menschen in ihren geistigen Fähigkeiten, ihrer emotionalen Veranlagung und den daraus resultierenden Wertvorstellungen bei gleichen gesellschaftlichen Entwicklungsbedingungen nicht unterscheiden, ein Glaube, der oft lapidar mit den Worten verkündet wird: Alle Menschen sind gleich! Es erscheint zunächst schwer fassbar, dass gebildete Menschen diesen Glaubenssatz verkünden; sie sollten doch wissen, dass eine evolutionäre Entwicklung nur möglich ist, wenn sich immer wieder Unterschiede einstellen. Bei Gültigkeit des oben genannten Gleichheitspostulats wäre der Mensch nicht über die Entwicklungsstufe eines Einzellers hinausgekommen. **Offensichtlich ist es so, dass bestimmte Glaubenssätze deshalb angenommen werden, weil das Leben mit ihnen angenehmer erscheint.**

Zweifel an völlig unrealistischen Glaubenssätzen werden manchmal in einer Art abgewehrt, als werde nach dem Leitsatz gehandelt: **Es kann nicht sein, was nicht sein darf !** Dies liegt an den emotionalen Wurzeln eines jeden Glaubens. Gefühle, die der Mensch im Laufe seiner Entwicklungsgeschichte erworben hat, sprechen für den Glauben. Jeder weiß, dass Zu- und Abneigung dafür maßgebend sind, ob wir jemandem glauben bzw. nicht glauben und dass wir Schmeicheleien gegenüber anfällig sind, weil sie gut tun. Oft glauben wir an die Redlichkeit von Leuten schon bei der ersten Begegnung, weil sie uns sympathisch sind und glauben manchmal sehr leichtfertig an angebliche Verfehlungen von Leuten, die wir nicht mögen. **Ein Glauben darf nicht mit einer Vermutung verwechselt werden.** Die Vermutung basiert auf rationalen Erwägungen und nicht wie der Glaube auf Emotionen. Diskussionen über Glaubenssätze sind fast immer emotional aufgeladen. Dies gilt nicht für Vermutungen. Bei einer Vermutung ist man sich immer bewusst, dass sie falsch sein kann. Man kennt einige Merkmale, welche für sie sprechen, es wird aber für möglich gehalten,

dass sie durch neue Erkenntnisse widerlegt wird. Mit Vermutungen kommt man nur dann in Konflikte, wenn diese Zweifel an liebgewonnenen bzw. politisch gewollten Glaubenssätzen nähren.

Das Wort Glaube ist von dem indogermanischen Wort „leubh“ abgeleitet, welches so viel bedeutet wie: begehren, lieb haben, für lieb erklären, gutheißen, loben (siehe Wikipedia). Es ist von der Natur so eingerichtet, dass besonders Kinder gutgläubig sind, denn bei ihrem nur schwach ausgebildetem Urteilsvermögen sind sie auf die Urteile der Erwachsenen angewiesen, die es gut mit ihnen meinen - normalerweise sind es die Eltern. Deshalb sind die Kirchen und alle totalitären Machthaber darauf aus, möglichst früh auf die Kinder in ihrem Sinne einzuwirken.

Ob einer Aussage geglaubt wird, hängt sehr von ihrer emotionalen Wirkung ab. Gefällt sie, dann wird sie gerne geglaubt, wenn sie nicht unmittelbar als Irrtum erkennbar ist. Gefällt sie nicht, weil sie möglicherweise verunsichert, weil ein liebgewonnenes Weltbild damit verloren geht, dann wird sie nur ungern angenommen, vielleicht sogar leidenschaftlich abgelehnt.

Für die Glaubwürdigkeit einer Aussage spricht:

- 1. der Erfolg, den sie ermöglicht,**
- 2. die Zahl der Menschen, welche zu ihr stehen,**
- 3. die Zeit, in der sie unwidersprochen bleibt,**
- 4. eine vermeintlich wohlthuende Sicht, die sie vermittelt und**
- 5. die Entschiedenheit, mit der sie vorgetragen wird.**

Die Wirkung solcher Argumente scheint auf den für unsere Evolution maßgebenden Gegebenheiten früherer Jahrtausende zu beruhen, denn Erfolg auf der Grundlage falscher Vorstellungen war sehr unwahrscheinlich und viele gleiche Aussagen standen für viele Einzelerfahrungen - **es gab keine Mittel der Massenbeeinflussung (Gleichschaltung)**. blieb eine Aussage lange Zeit unwidersprochen, dann hatte sie sich bewährt. Auch heute wird zur Begründung einer Aussage immer wieder gesagt: „**Das sagt doch der und jener auch !**“ oder „**Es gab noch nie einen Grund daran zu zweifeln !**“ oder „**Der Erfolg gibt ihm Recht !**“. Im 17. und 18. Jahrhundert, der Zeit der Gegenreformation, hat die katholische Kirche herrliche barocke Kirchen errichten lassen, denn großartige Werke werden als Erfolg und somit als Ausdruck von Glaubwürdigkeit gewertet. Die islamische und christliche Religion verdanken ihre Ausbreitung hauptsächlich den kriegerischen Erfolgen, die im Glauben an sie errungen wurden. Mythen über solche Erfolge spielen hierbei auch eine große Rolle, man denke an das Buch Joshua im Alten Testament- ein nach dem israelischen Historiker Shlomo Sand historisch nicht belegbarer Mythos.

Wenn Leute ihren Glauben an die christliche Religion begründen, dann geschieht dies in der Regel mit der Aussage: „**Dieser Glaube hilft mir !**“ Der Glaube tut ihnen gut, er gibt ihnen eine Orientierung und bewahrt dementsprechend vor Verzweiflung.

Das eine wohlthuende Sicht gerne angenommen wird, hatte in weit zurückliegenden Zeiten sehr wahrscheinlich mehr Positives als Negatives an sich. Sie kann einen Menschen zu großen Leistungen anspornen. Für Korrekturen hat die Realität immer sehr schnell gesorgt. In der Gegenwart können sich Menschen über lange Zeit von wohlthuenden völlig unrealistischen Glaubenssätzen leiten lassen, weil sie dank der Leistungen ihrer Vorfahren über eine relativ sichere Lebensgrundlage verfügen (z.B. soziale Absicherung) und **noch**

nicht um ihre Existenz ringen müssen. Wunschvorstellungen werden verinnerlicht und schließlich sogar als „Wahrheiten“ angenommen, wenn mit ihnen das Leben angenehmer erscheint. Sie sind nicht unbedenklich, denn sie können lang anhaltende Fehlentwicklungen begünstigen. Möglicherweise ist dies ein Grund für den Untergang von Hochkulturen.

Eine Mehrheitsmeinung kann unfassbar gläubig machen, denn Widerspruch gegen eine herrschende Meinung erzeugt Missfallen. Man denke an das Märchen: **Des Kaisers neue Kleider**.

Wird eine Meinung mit Entschiedenheit vorgetragen, dann kann man damit rechnen, dass sie ohne Begründung hingenommen wird. Verständlich wird dies, wenn man bedenkt, dass in weit zurückliegenden Zeiten die Kombination von Entschiedenheit und Dummheit nur eine geringe Überlebenschance hatte.

Die Wirksamkeit der angegebenen Gründe für Glaubwürdigkeit kann in der Gegenwart schlimme Folgen haben, denn mit den Medien (Fernsehen) können Mehrheitsmeinungen erzeugt, und die Meinungsvielfalt kann derart reduziert werden, dass nur noch gängige und nicht anstößige Meinungen ausgetauscht werden.

*In bunten Bildern wenig Klarheit,
Viel Irrtum und ein Fünkchen Wahrheit,
So wird der beste Trank gebraut,
Der alle Welt erquickt und auferbaut.*

Goethe (Faust I)

